GRUPO 1: BELÉN CARO MARROYO, MIGUEL GARCÍA DIÉGUEZ, AMALIA TOBOSO CASTAÑERA.

Hoja de problemas nº: 4

15 e) Encuentra soluciones aproximadas mediante el método de balance armónico de las ecuaciones siguientes:

$\ddot{x} + x - \alpha x^2 = 0$, $\alpha > 0$

Proponemos una solución de la forma:

$x(t) = C + A\cos(\omega t)$

Comprobamos si la ecuación es invariable cuando hacemos el cambio de x por –x:

$-\ddot{x} - x - \alpha x^2 = 0$

Como la ecuación no es invariable respecto a dicho cambio tenemos que $C \neq 0$.

Estudiamos las derivadas de x(t) para sustituirlas acto seguido en la ecuación:

$\dot{x}(t) = -A\omega sen(\omega t)$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$

Sustituyendo:

$-A\varpi^2 \cos(\omega t) + C + A\cos(\omega t) - \alpha(C + A\cos(\omega t))^2 = 0$

$-A\varpi^2 \cos(\omega t) + C + A\cos(\omega t) - \alpha C^2 - \alpha A^2 \cos^2(\omega t) - 2\alpha CA\cos(\omega t) = 0$

Hacemos el desarrollo de Fourier para $\cos^2(\omega t)$ y nos quedamos con los armónicos de menor orden:

$$\cos^2(\omega t) = \frac{(2-1)!!}{2*1!} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(-A\omega^2 + A - 2CA\alpha)\cos(\omega t) + C - \alpha C^2 - \frac{1}{2}\alpha A^2 = 0$$

Para que la ecuación se verifique se ha de cumplir que:

1) $C - \alpha C^2 - \frac{1}{2}\alpha A^2 = 0$

2) $-A\omega^2 + A - 2CA\alpha = 0$

Con la primera ecuación hallamos el valor de la constante y con la segunda establecemos la relación buscada entre A y ω.

1) $C - \alpha C^2 - \frac{1}{2}\alpha A^2 = 0$

$$-C + \alpha C^2 + \frac{1}{2}\alpha A^2 = 0$$

Despejando C:

$$C = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}}{2\alpha}$$

Tenemos así 2 soluciones. Aún no podemos elegir cuál es la adecuada, lo aclararemos con la segunda ecuación. Las soluciones para C son:

$$C_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}}{2\alpha}$$

$$C_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}}{2\alpha}$$

NOTA: Todo esto siempre y cuando $2\alpha^2 A^2$ sea menor que 1 para que la constante C sea real.

Estudiando ahora la 2ª ecuación:

2) $-A\omega^2 + A - 2CA\alpha = 0$

Sacando A factor común:

$-\omega^2 + 1 - 2C\alpha = 0$

Despejando ω^2:

$\omega^2 = 1 - 2C\alpha$

Sustituyendo ahora el valor de C_1 y C_2:

$\omega_1^2 = -\sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}$

$\omega_2^2 = \sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}$

Nos quedamos con el segundo valor, porque físicamente no tiene sentido una frecuencia compleja. Así:

$$C = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}}{2\alpha} \qquad \omega^2 = \sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}$$

16 a) Emplea el método de Krylov-Bogoliubov para hallar soluciones aproximadas de las siguientes ecuaciones: $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$

Identificando los elementos de nuestra ecuación modelo:

$$\omega^2 = 1$$

$$f(x,\dot{x}) = x^3$$

Elegimos una solución de la forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\Psi$$

Buscamos los coeficientes A y φ:

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} A^3 \cos^3\Psi sen\Psi d\Psi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{2\pi} A^3 \cos^3\Psi \cos\Psi d\Psi$$

Resolviendo:

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon A^3}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^3\Psi sen\Psi d\Psi = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^4\Psi d\Psi$$

Para resolver esta ecuación hacemos un desarrollo de Fourier de $\cos^4\Psi$ y nos quedamos con el armónico de menor orden:

$$\cos^4\Psi = \frac{(4-1)!!}{2^2 2!} = \frac{3}{8}$$

Ahora ya podemos escribir:

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon A^2}{2\pi}\frac{3}{8}\int_0^{2\pi} d\Psi = \frac{3\varepsilon A^2}{8}$$

Determinamos ahora A y φ:

$$\dot{A} = 0 \Rightarrow A = cte = A_0$$

$$\int \frac{d\varphi}{dt} dt = \int \frac{3\varepsilon A^2}{8} dt \ ; \ \varphi(t) = \frac{3\varepsilon A^2}{8} t + \varphi_0$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x(t) = A_0 \cos\left(\omega t + \frac{3\varepsilon A^2}{8} t + \varphi_0 \right)$$

Así, llegamos a la solución:

$$x(t) = A_0 \cos\left[\left(1 + \frac{3\varepsilon A^2}{8} \right) t + \varphi_0 \right]$$

Para comprobar que nuestro resultado es correcto, podemos darle a ε el valor de -1/6 y contrastar nuestra solución con la que se obtenía en el ejercicio 15 a) mediante el método de balance armónico.

La ecuación a resolver por los dos métodos es: $\ddot{x} + x - \frac{1}{6} x^3 = 0$.

- En nuestro ejercicio se obtuvo: $x(t) = A_0 \cos\left[\left(1 - \frac{A^2}{16} \right) t + \varphi_0 \right]$

- Y en el ejercicio 15 a): $x(t) = A\cos(\sqrt{1 - \frac{A^2}{8}} t)$. Ahora bien, si tenemos en cuenta que el valor de amplitud es lo suficientemente pequeño, podemos considerar el desarrollo en serie de la frecuencia y quedarnos sólo con los dos primeros términos: $\omega = \sqrt{1 - \frac{A^2}{8}} = 1 - \frac{A^2}{16} \ldots$

Así pues, vemos como, efectivamente, las dos soluciones coinciden cuando $\varphi_0 = 0$.