JUAN FERNANDO BRAVO PAREDES

PEDRO JOSÉ MUÑOZ REYES

ÁNGEL HIERRO GARDETA

HOJA 4 - Prolema16,d)

Emplea el método de Krylov-Bogoliubov para hallar la solución aproximada de la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} + x + \epsilon(\frac{dx}{dt} + \alpha x^3)}$$

Comparando la ecuación diferencial con la expresión del problema de Krylov-Bogoliubov tenemos que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

Vemos que:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = (\frac{dx}{dt} + \alpha x^3) \text{ y que } \omega \quad = 1.$$

Consideramos que x(t) tiene una solución general de la forma:

$$x(t) = \mathrm{A(t)cos}\ (\omega t + \varphi(t)) \qquad (1)$$

por lo tanto: $\dot{x}(t) = -A(t)\omega \mathrm{sen}\ (\omega t + \varphi(t))$

Llamamos $\Psi = \omega t + \varphi(t)$.

El valor de la amplitud es:

$$\dot{A}(t) = \frac{\epsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(A(t)cos\ \ \Psi, -\omega A(t)\mathrm{sen}\Psi)\mathrm{sen}\Psi d\Psi =$$

$$= \frac{A(t)\epsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}((-sen\Psi + \alpha A(t)^2\cos^3\Psi)sen\Psi\ d\Psi) =$$

$$= \frac{A(t)\epsilon}{2\pi\omega}\left(\int_0^{2\pi} -sen^2\Psi\ d\Psi + \alpha A^2(t)\int_0^{2\pi}(\mathrm{sen}\Psi\cos^3\Psi)d\Psi\right)$$

Mirando en tablas vemos que:

$$\int_0^{2\pi} -sen^2\Psi\, d\Psi = \left[\frac{\Psi}{2} - \frac{\mathrm{sen}2\Psi}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}\Psi \cos^3\Psi) d\Psi = \left[-\frac{\cos^4\Psi}{4}\right]_0^{2\pi}$$

El valor de la amplitud es:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{\epsilon A(t)}{2} => \frac{dA(t)}{A(t)} = -\frac{\epsilon dt}{2}\text{, integrando, } \int_0^t \frac{dA(t)}{A(t)} = -\int_0^t \frac{\epsilon dt}{2} =$$

$$\ln A(t) = -\frac{\epsilon}{2}t + C = A(t) = De^{-\epsilon/_2\, t} \qquad (2)$$

El valor de la fase es:

$$\dot{\varphi}(\mathrm{t}) = \frac{\epsilon}{2\pi A(t)\omega}\int_0^{2\pi} f(A(t)cos\ \Psi, -\omega \mathrm{A(t)sen}\Psi)\cos\Psi d\Psi =$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}((-sen\Psi + \alpha \mathrm{A}^2(\mathrm{t}) \cos^3\Psi)cos\Psi\, d\Psi) =$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi}\left(-\int_0^{2\pi} sen\Psi \cos\Psi\ d\Psi + \alpha \mathrm{A}^2(\mathrm{t}) \int_0^{2\pi} (\cos^4 \Psi) d\Psi\right)$$

Mirando en tablas vemos que:

$$\int_0^{2\pi} sen\Psi\cos\Psi\, d\Psi = \left[\frac{\mathrm{sen}^2\Psi}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^4\Psi) d\Psi = \left[\frac{3\Psi}{8} + \frac{\mathrm{sen}2\Psi}{4} + \frac{\mathrm{sen}4\Psi}{32}\right]_0^{2\pi}$$

El valor de la fase es:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{3}{8}\epsilon\alpha A^2(t)\text{, integrando, } \int_0^t d\varphi(t) = \int_0^t \frac{3}{8}\epsilon\alpha A^2(t)dt =$$

$$\varphi(t) = \frac{3}{8}\epsilon\alpha \int_0^t A^2(t)dt = -\frac{3}{8}\alpha D^2 e^{-\epsilon t} + E \qquad (3)$$

Aplicando a (2) y (3) las condiciones iniciales: $A(0) = A_0$, $\varphi(\infty) = \varphi_0$, se obtiene:

$$D = A_0 \quad E = \varphi_0 \qquad (4)$$

Sustituyendo los valores de (4) en (2) y (3) obtenemos:

$$A(t) = A_0 e^{-\epsilon/2\ t}$$

$$\varphi(t) = -\frac{3}{8}\alpha {A_0}^2 e^{-\epsilon t} + \varphi_0 \qquad (5)$$

Como la solución del problema tiene la forma de la ecuación (1), (recordando que ω =1):

$$x(t) = A(t)\cos\left(t + \varphi(t)\right)$$

Si sustituimos los valores de la ecuación (5) en la expresión anterior, tendremos que la solución de la ecuación diferencial no lineal es:

$$x(t) = A_0 e^{-(\epsilon/2)t}\cos\left(t - \frac{3}{8}\alpha {A_0}^2 e^{-\epsilon t} + \varphi_0\right)$$