Métodos de la Física Matemática

TEMA 4

Problema 16 h

Antonio Castaño Tierno
Víctor P. Galván Chacón
Ramón J. Parejo Cuéllar
Jesús M. Simón Martín

Problema 16h

Encuentra soluciones aproximadas mediante el método de balance armónico para la ecuación siguiente:

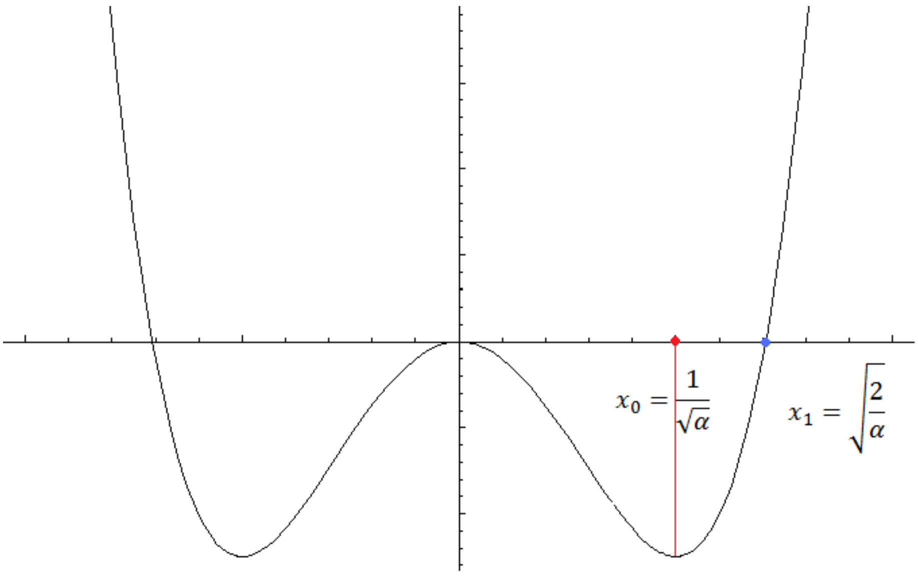
$$\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} - x + \alpha x^3$$

Física del problema

Observando la ecuación que nos dan vemos que el término $-x + \alpha x^3$ corresponde a la fuerza que actúa sobre el sistema. Integrando:

$$V(x) = \int (-x + \alpha x^3)dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}$$

La representación gráfica de este potencial tiene la forma siguiente:



Buscamos una solución del tipo x(t)=**C+A** cos(**ω**t+**ϕ**). Tomamos por definición ϕ(0)=0. Tenemos entonces:

$$x(t) = C + Acos(\omega t)$$

Hacemos las derivadas:

$$\dot{x}(t) = -\dot{\omega} Asin(\omega t)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 Acos(\omega t)$$

Sustituimos estas derivadas en la ecuación:

$$-\omega Acos\omega t + \epsilon(1 - (C + Acos\omega t)^2)(-\omega Asin\omega t) - C - Acos\omega t + \alpha(C + Acos\omega t)^3$$

$$= -\omega^2 Acos\omega t + \epsilon(1 - C^2 - 2ACcos\omega t - A^2 \cos^2 \omega t)(-\omega Asin\omega t) - C - Acos\omega t + \alpha(C + Acos\omega t)^3$$

Introducimos los desarrollos de Fourier siguientes:

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} cos\omega t + a.o.s.$$
$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + a.o.s.$$
$$\cos^2 \omega tsin\omega t = \frac{1}{2} sin\omega t + a.o.s.$$

$= -\omega^2 Acos\omega t + \epsilon(-\omega Asin\omega t + C^2 A\omega sin\omega t + 2A^2 C\omega sin\omega tcos\omega t + A^3\omega \cos^2 \omega tsin\omega t - C - Acos\omega t + \alpha(C^3 + 3C^2 Acos\omega t + 3CA^2 \cos^2 \omega t + A^3 \cos^3 \omega t = 0$

Identificando llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -C + \alpha C^3 + \frac{3}{2}\alpha CA^2 = 0 \\ -\omega^2 A - A + \frac{3}{4}\alpha A^3 + 3\alpha C^2 A = 0 \\ -\epsilon\omega A + \epsilon C^2 A\omega + \frac{1}{2}\epsilon A^3\omega = 0 \end{cases}$$

Consideramos dos casos:

(I) C≠0

$$\begin{cases} -1 + \alpha C^2 + \frac{3}{2}\alpha A^2 = 0 \\ -\omega^2 - 1 + \frac{3}{4}\alpha A^2 + 3\alpha C^2 = 0 \\ -1 + C^2 + \frac{1}{2}A^2 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} A^2 = \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \\ C^2 = \dfrac{3\alpha - 1}{2\alpha} \\ \omega^2 = \dfrac{1}{4}(15\alpha - 7) \end{cases}$$

Una de las posibles soluciones del sistema es:

$$x(t) = \sqrt{\frac{3\alpha - 1}{2\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} * \cos\frac{1}{2}\sqrt{15\alpha - 7}\, t$$

Esta solución es sólo válida para $\frac{7}{15} < \alpha < 1$.

Consideremos ahora el otro caso:

(II) C=0

$$\begin{cases} -\omega^2 - 1 + \dfrac{3}{4}\alpha A^2 = 0 \\ -1 + \dfrac{1}{2}A^2 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{3}{2}\alpha - 1 \\ A = \sqrt{2} \end{cases}$$

La amplitud A es la amplitud del ciclo límite, a la que llamaremos a partir de ahora A_c.

La solución para este caso será:

$$x(t) = \sqrt{2}\cos\sqrt{\frac{3}{2}\alpha - 1t}$$

Esta solución es válida para $\alpha > 1$, ya que la amplitud es $\sqrt{2}$, y $x_1 < A_c = \sqrt{2}$.

Por tanto, tenemos que la primera solución es válida para $\alpha < 1$ (aparte de las otras condiciones propias de esa situación, debidas a que ω no puede ser imaginaria), y la segunda, para $\alpha > 1$.

Vemos que el propio problema nos dice qué solución es válida en cada caso: cuando $\alpha < 1, x_1 > \sqrt{2}$, es decir, menor que la amplitud del ciclo límite, por lo que la solución está por debajo del eje de abcisas, es decir, las oscilaciones se producen en el interior del pozo. Sin embargo, cuando $\alpha > 1, x_1 < \sqrt{2}$, menor que A_c, y la solución es válida por encima del eje de abscisas, fuera del pozo, en la zona de energía positiva.