Mónica Capilla Alba
Jesús Manuel Gómez Romero

Hoja de problemas 3

17 (apartado d)**.- Emplea el método de Krylov – Bogoliubov para hallar la solución aproximada de la siguiente ecuación:**

$$\ddot{x} + x + \varepsilon \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0 \tag{1}$$

(amortiguamiento de Coulomb)

Podemos aplicar el método de Krylov – Bogoliubov a ecuaciones del tipo:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon f(x,\dot{x}) = 0 \tag{2}$$

y nos dará una solución aproximada de la ecuación diferencial que tendrá la forma:

$$x(t) = A(t) \cos\left[\omega t + \varphi(t)\right] \tag{3}$$

Particularizando para nuestro caso, tenemos que:

$$\omega = 1 \qquad ; \qquad f(x,\dot{x}) = \operatorname{sgn}(\dot{x}) \tag{4}$$

siendo la función $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$

y por tanto, la ecuación de la solución aproximada (3) nos queda:

$$x(t) = A(t) \cos\left[t + \varphi(t)\right] \tag{5}$$

Para determinar $A(t)$ y $\varphi(t)$, utilizamos las expresiones siguientes, (proporcionadas por el método de Krylov – Bogoliubov):

$$\dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\, sen\psi)\, sen\psi \; d\psi \tag{6}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi A\omega} \int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\, sen\psi) \cos\psi \; d\psi \tag{7}$$

Hallamos $\dot{A}(t)$ y $\dot{\varphi}(t)$:

$$\dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(-A\, sen\psi)\, sen\psi \; d\psi \tag{8}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi A} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(-A\, sen\psi) \cos\psi \; d\psi \tag{9}$$

Como podemos ver, la función *sgn* depende del valor que tome ψ, lo analizaremos por intervalos:

$$\begin{array}{llllll}
\psi : (0, \pi/2) & \rightarrow & sen\psi > 0 & \Rightarrow & \operatorname{sgn}(-A sen\psi) = -1 \\
\psi : (\pi/2, \pi) & \rightarrow & sen\psi > 0 & \Rightarrow & \operatorname{sgn}(-A sen\psi) = -1 \\
\psi : (\pi, 3\pi/2) & \rightarrow & sen\psi < 0 & \Rightarrow & \operatorname{sgn}(-A sen\psi) = 1 \\
\psi : (3\pi/2, 2\pi) & \rightarrow & sen\psi < 0 & \Rightarrow & \operatorname{sgn}(-A sen\psi) = 1
\end{array}$$

Separando la integral de las ecuaciones (8) y (9) en cuatro integrales y utilizando los resultados anteriores, tenemos que:

$$\dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2} -1\, sen\psi\, d\psi + \int_{\pi/2}^{\pi} -1\, sen\psi\, d\psi + \int_{\pi}^{3\pi/2} 1\, sen\psi\, d\psi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} 1\, sen\psi\, d\psi\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[\cos\psi\Big|_0^{\pi/2} + \cos\psi\Big|_{\pi/2}^{\pi} + (-\cos\psi)\Big|_{\pi}^{3\pi/2} + (-\cos\psi)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[-\cos 0 + 2\cos\pi - \cos 2\pi\right] = \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[-1 + 2(-1) - 1\right]$$

$$\dot{A}(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi} \qquad (10)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi A}\left[\int_0^{\pi/2} -1\cos\psi\, d\psi + \int_{\pi/2}^{\pi} -1\cos\psi\, d\psi + \int_{\pi}^{3\pi/2} 1\cos\psi\, d\psi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} 1\cos\psi\, d\psi\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi A}\left[(-sen\psi)\Big|_0^{\pi/2} + (-sen\psi)\Big|_{\pi/2}^{\pi} + sen\psi\Big|_{\pi}^{3\pi/2} + sen\psi\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[sen\, 0 - 2\, sen\pi + sen\, 2\pi\right] = \frac{\varepsilon}{2\pi}\left[0 - 2\cdot 0 + 0\right]$$

$$\dot{\varphi}(t) = 0 \qquad (11)$$

Resolvemos las ecuaciones diferenciales (10) y (11) para obtener $A(t)$ y $\varphi(t)$:

$$A(t) = A_0 - \frac{2\varepsilon}{\pi} t \qquad (12)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \qquad (13)$$

Sustituyendo en la ecuación (5), obtenemos como solución aproximada:

$$\boxed{x(t) = \left(A_0 - \frac{2\varepsilon}{\pi} t\right) \cos\left[t + \varphi_0\right]} \qquad (14)$$

Como la ecuación dada es un amortiguamiento de Coulomb, sabemos que el sistema al cabo de un cierto tiempo alcanzará el reposo, de modo que podemos expresar la solución obtenida sabiendo el tiempo que tardará en pararse, que llamaremos *t'*:

$$A_0 - \frac{2\,\varepsilon}{\pi}\,t' = 0 \tag{15}$$

Despejando *t'*:

$$t' = \frac{\pi\,A_0}{2\,\varepsilon} \tag{16}$$

Entonces, obtenemos como solución aproximada de la ecuación propuesta:

$$x(t) = \begin{cases} \left(A_0 - \dfrac{2\,\varepsilon}{\pi}\,t\right)\cos\left[\,t + \varphi_0\,\right] & , \quad t < t' \\ 0 & , \quad t \geq t' \end{cases} \tag{17}$$