17.h) Emplea el método de Krylov-Bogoliubov para hallar la solución aproximada de la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} - x + \alpha x^3 = 0 \quad , \quad 0 < \alpha$$

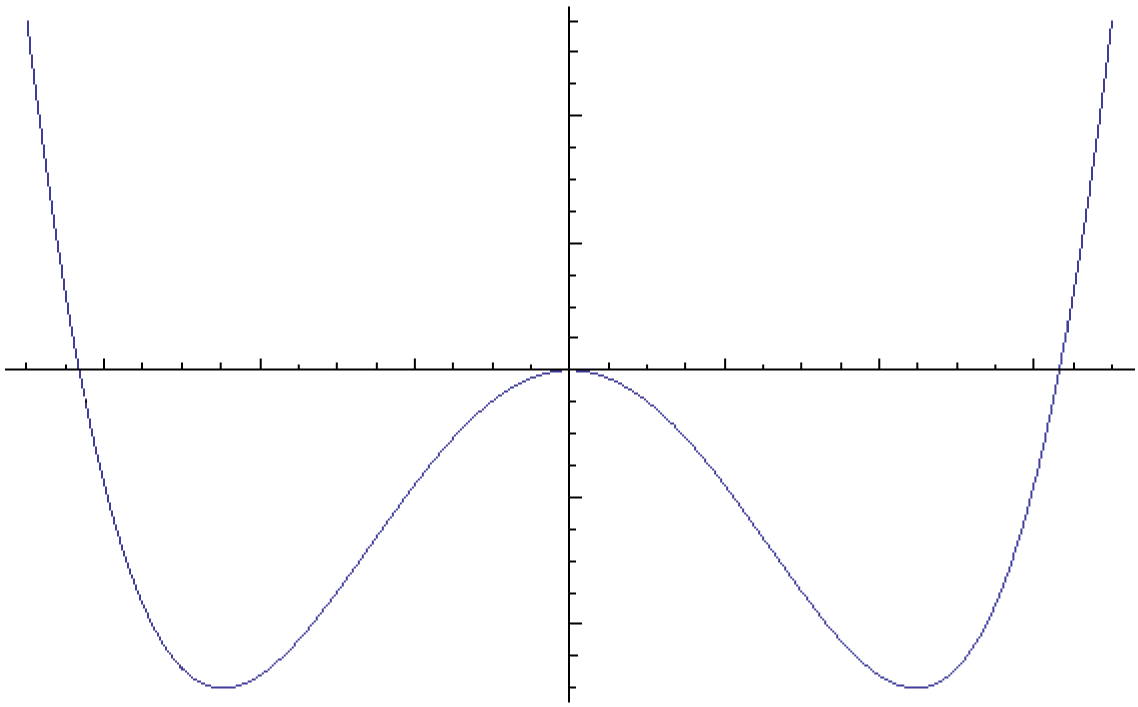
La ecuación del oscilador de Krylov-Bololiubov tiene la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \epsilon f(x, \dot{x}) = 0 \quad , \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

Cuya solución para el caso en que ϵ=0 es:

$$x(t) = A cos(\omega t + \varphi)$$

En el caso de nuestro problema, estamos ante el potencial $V(x) = \alpha \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$, que representado gráficamente:



Hallaremos la solución en el pozo de la derecha únicamente ya que es simétrico. Para ello necesitamos la posición del mínimo, para ello hacemos la derivada del potencial y la igualamos a cero:

$$\alpha x^3 - x = 0 => x_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Ahora la solución que buscamos es de la forma:

$$u(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

Hacemos el cambio de variable $x=u+x_0$, Por lo tanto nuestra ecuación nos queda de la siguiente forma:

$$\ddot{u} + \epsilon[1-(u + x_0)^2]\dot{u} - (u + x_0) + \alpha(u + x_0)^3 = 0$$

$$\ddot{u} + \epsilon[1 - (u^2 + x_0^2 + 2ux_0)]\dot{u} - (u + x_0) + \alpha(u^3 + 3u^2x_0 + 3ux_0^2 + x_0^3) = 0$$

$$\ddot{u} + (-1 + 3\alpha x_0^2)u + \epsilon[(1 - (u^2 + x_0^2 + 2ux_0))\dot{u} - \frac{1}{\epsilon}x_0 + \frac{\alpha}{\epsilon}(u^3 + 3u^2x_0 + x_0^3)] = 0$$

$$\ddot{u} + (-1 + 3\alpha x_0^2)u + \epsilon[(1 - (u^2 + x_0^2 + 2ux_0))\dot{u} + \frac{\alpha}{\epsilon}(u^3 + 3u^2x_0)] = 0$$

Si comparamos los términos con los del oscilador de Krylov-Bogoliubov vemos que:

$$\omega^2 = -1 + 3\alpha x_0^2 = -1 + 3\alpha\frac{1}{\alpha} = 2$$

$$f(u, \dot{u}) = [1 - (u^2 + x_0^2 + 2ux_0)]\dot{u} - \frac{1}{\epsilon}x_0 + \frac{\alpha}{\epsilon}(u^3 + 3u^2x_0 + x_0^3)$$

Ahora pasamos a calcular la amplitud y la fase:

$$\dot{A} = \frac{\epsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} [\![f(A\cos\psi, -\omega\,\mathrm{A}\sin\psi]\!]) \sin\psi\, d\psi =$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} [(1 - (A^2\cos^2\psi + x_0^2 + 2x_0A\cos\psi))(-\omega\,\mathrm{A}\sin\psi) +$$

$$+\frac{\alpha}{\epsilon}(A^3\cos^3\psi + 3x_0A^2\cos^2\psi)]\sin\psi\, d\psi =$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} [-\omega\,\mathrm{A}\sin^2\psi + \omega\,\mathrm{A}^3\sin^2\psi\cos^2\psi + x_0^2\omega\,\mathrm{A}\sin^2\psi + 2x_0A^2\omega\sin^2\psi\cos\psi +$$

$$+\frac{\alpha}{\epsilon}A^3\cos^3\psi\sin\psi + 3\frac{\alpha}{\epsilon}x_0A^2\cos^2\psi\sin\psi]d\psi =$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi\omega}\left[-\omega A\pi + \frac{\omega A^3\pi}{4} + x_0^2\omega A\pi\right] = -\frac{\epsilon}{2}A\left[1 - x_0^2 - \frac{A^2}{4}\right]$$

Finalmente obtenemos una ecuación diferencial:

$$\dot{A} = -\frac{\epsilon}{2}A\left[1 - x_0^2 - \frac{A^2}{4}\right] => A^2(t) = \frac{(1 - x_0^2)A^2(0)e^{-\epsilon(1-x_0^2)t}}{1 - x_0^2 + \frac{A^2(0)}{4}[e^{-\epsilon(1-x_0^2)t} - 1]}$$

Ahora pasamos a calcular la fase:

$$\dot{\varphi} = \frac{\epsilon}{2\pi A\omega}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi\,, -\omega A\sin\psi)\cos\psi\, d\psi =$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi A\omega}\int_0^{2\pi}[(1-(A^2\cos^2\psi + x_0^2 + 2x_0 A\cos\psi))(-\omega\,\mathrm{A}\sin\psi) +$$

$$+\frac{\alpha}{\epsilon}(A^3\cos^3\psi + 3x_0A^2\cos^2\psi)]\cos\psi\, d\,\psi =$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi A\omega}\int_0^{2\pi}[-\omega\,\mathrm{A}\sin\psi\cos\psi + A^3\omega\cos^3\psi\sin\psi + \omega A x_0^2\cos\psi\sin\psi + 2\,x_0A^2\omega\cos^2\psi\sin\psi +$$

$$+\frac{\alpha}{\epsilon}A^3\cos^4\psi + \frac{\alpha}{\epsilon}3x_0\cos^3\psi]\,d\,\psi =$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi A\omega}\left[\frac{\alpha}{\epsilon}A^3\frac{3\pi}{4}\right] = \frac{3\alpha}{8\sqrt{2}}A^2(t) = \frac{3\alpha}{8\sqrt{2}}\frac{(1-x_0^2)A^2(0)e^{-\epsilon(1-x_0^2)t}}{1-x_0^2+\frac{A^2(0)}{4}[e^{-\epsilon(1-x_0^2)t}-1]}$$

Volvemos a tener una ecuación diferencial, que resolviéndola nos queda:

$$\frac{8\sqrt{2}}{3\alpha}[\varphi(t)-\varphi(0)] = (1-x_0^2)t + \frac{1}{\epsilon}\log[e^{(1-x_0^2)\epsilon t} + \frac{A^2(0)}{4(1-x_0^2)}\left(e^{(1-x_0^2)\epsilon t}-1\right)]$$