HOJA 4
Ejercicio 6

Fraire González, Juan Jesús
Gordillo Guerrero, Fernando
Fernández Fernández, Ana Belén
Gerona Plá, Federico

Abril 2009

En este ejercicio queremos analizar la evolución de los sentimientos amorosos de Romeo y Julieta. Sea $R(t)$ la medida del amor de Romeo por Julieta en el instante t y $J(t)$ el de Julieta por Romeo. Si esta medida es negativa, el sentimiento no es de amor sino de rechazo. Un modelo simple de la evolución de sus amores se basa en la consideraciín de que su amor crece o disminuye dependiendo sólo de sus sentimiento mutuos. Supongamos que esta dependencia es lineal. Entonces:

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \qquad \frac{dJ}{dt} = cR + dJ$$

1. **Sugiere nombres que describen el carácter de un enamorado, digamos de Romeo, para las distintas combinaciones del signo de a y b.**

2. **Supón que el amor de Romeo aumenta (disminuye) si Julieta le ama (no le ama) y el de Julieta aumenta (disminuye) si Romeo no le ama (sí le ama). En este caso, las ecuaciones tomarían la forma:**

$$\frac{dR}{dt} = aJ, \qquad \frac{dJ}{dt} = -bR$$

   con $a > 0$ y $b > 0$. Traza el diagrama de fases de la evolución de los amores de Romeo y Julieta para este caso.

3. **Supón que el amor de Romeo tiende a disminuir si él ya ama a Julieta y a aumentar si Julieta le ama. Supón que Julieta se comporta exactamente de la misma forma. En este caso, la evolución de sus sentimientos vendría dada por**

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \qquad \frac{dJ}{dt} = bR + aJ$$

   con $a < 0$ y $b > 0$. Demuestra que:

   (a) **Si $a^2 > b^2$, entonces su relación amorosa languidece hasta la indiferencia absoluta.**

   (b) **Si $a^2 < b^2$, entonces su relación amorosa puede transfomrarse bien en pasión total o en guerra encarnizada.**
   Determina bajo qué condiciones iniciales se produce una cosa u otra.

1. Para poder nombrar los estados del enamorado Romeo, tenemos que ver primero cómo evolucionan sus sentimientos cuando sólamente interviene él en ellos (valores de a) y cuando sólamente interviene Julieta (valores de b). Así nos aparecen cuatro posibilidades:

   - $a < 0$ y $b = 0$: Cuando Romeo se está "desenamorando" de Julieta el amor de Romeo disminuye. *Cansino.*
   - $a > 0$ y $b = 0$: Cuando Romeo se está "enamorando" de Julieta el amor de Romeo disminuye. *Obsesivo.*

- $a = 0$ y $b < 0$: Cuando Julieta se está "desenamorando" de Romeo el amor de Romeo disminuye. *Lógico.*
- $a = 0$ y $b > 0$: Cuando Julieta se está "enamorando" de Romeo el amor de Romeo aumenta. *Acosador.*

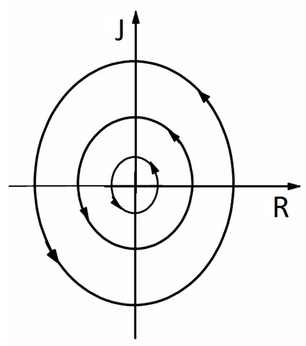
2. Primero comprobamos que no sea un sistema de ecuaciones linealmente dependiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aJ \\ \frac{dJ}{dt} &= -bR \end{aligned}\right\} \begin{vmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{vmatrix} = ab \underset{b>0}{\overset{a>0}{\neq}} 0$$

Ahora nos disponemos a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 0-m & a \\ -b & 0-m \end{vmatrix} = m^2 + ab = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{ab} \begin{cases} m_1 = +i\sqrt{ab} \\ m_2 = -i\sqrt{ab} \end{cases}$$

Tenemos entonces que las soluciones son raíces imaginarias puras, por lo que tendremos un centro en el diagrama de fases.



De los resultados obtenidos podemos ver que esta relación es de altibajos emocionales. Si Julieta le ama mucho, Romeo también la amará mucho, y si la ama poco, Romeo la amará poco. Podemos verlo en el diagrama de fases ya que representa un sistema estable.

3. Hacemos la comprobación inicial de que no sea un sistema linealmente dependiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= bR + aJ \end{aligned}\right\} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \underset{a\neq b}{\overset{a<0,b>0}{\neq}} 0$$

Y si resolvemos el sistema de ecuaciones tendremos que:

$$\begin{vmatrix} a-m & b \\ b & a-m \end{vmatrix} = m^2 - 2am + a^2 - b^2 = 0$$

$$m = \frac{2a \pm \sqrt{4b^2}}{2} = \begin{cases} m_1 = a + b \\ m_2 = a - b \end{cases}$$

Como tenemos que $a < 0$, $b > 0$ y que $a \neq b$ se pueden dar 2 casos diferentes:

(a) que tanto m_1 como m_2 sean negativas, para lo cual solamente es posible que $a^2 > b^2$, por lo que tendremos un *nodo estable*.

(b) o que m_1 sea positiva y m_2 sea negativa, por lo que $a^2 < b^2$, y tendremos un *punto de silla*.

Para ver bajo qué condiciones ocurre que haya pasión total o guerra encarnizada trazamos el diagrama de fases.

Primero tenemos que calcular los vectores que determinan las direcciones principales:

i. $m_1 = a + b$:

$$\begin{pmatrix} a - m_1 & b \\ b & a - m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - (a+b) & b \\ b & a - (a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = u_2$$

Por ejemplo pongamos que $u_1 = u_2 = 1$, entonces $(u_1, u_2) = (1, 1)$

ii. $m_1 = a - b$:

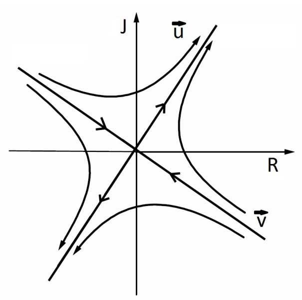
$$\begin{pmatrix} a - m_1 & b \\ b & a - m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - (a-b) & b \\ b & a - (a-b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2$$

Por ejemplo pongamos que $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = -1$, entonces $(v_1, v_2) = (1, -1)$

Tenemos entonces que el sistema de ecuaciones sigue la ecuación:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = c_1 \vec{u} e^{m_1 t} + c_2 \vec{v} e^{m_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(a+b)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{(a-b)t}$$

Como tenemos que $m_1 > 0$ y que $m_2 < 0$ tenemos que cada vez se hace menor la componente del vector $\vec{v}$. Así, tenemos que el diagrama de fases es:



Entonces tenemos que se convierte la relación en:

i. Pasión total si las condiciones iniciales representan un punto por encima de la recta formada por $\vec{v}$. Nota: recordemos que la relación era de amor si la medida de los sentimientos era positiva.

ii. Guerra encarnizada si las condiciones iniciales representan un punto por debajo de la recta formada por $\vec{v}$.