Clara Gómez García
María Jesús Macías Castillo
Noelia Solís Preciado
Juan Villa Morales

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA. TEMA 4. EJERCICIO 8.

Las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon_1 x - \sigma_1 x^2 - \alpha_1 xy, \quad \frac{dy}{dt} = \epsilon_2 y - \sigma_2 y^2 - \alpha_2 xy$$

con $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$***, son ecuaciones de tipo Lotka-Volterra que pretenden describir la competición de dos especies (digamos conejos y ovejas), con población*** x ***e*** y***, que, en un ecosistema dado, comparten un mismo alimento (hierba) presente en cantidades limitadas. En lo que sigue supón que*** $\epsilon_1 = 3, \epsilon_2 = 2, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$.

a) Discute la adecuación del sistema anterior a la descripción del sistema de dos especies competidoras e interpreta el significado de los coeficientes ϵ_1, ϵ_2, σ_1, σ_2, α_1, α_2.

b) Halla los puntos críticos del sistema y, mediante el análisis del sistema linealizado, discute su tipo y estabilidad. Haz un esquema de las trayectorias del sistema linealizado en las vecindades de los puntos críticos.

c) Haz un esquema de las trayectorias en el espacio de las fases.

a)

Analizando nuestro sistema, la interpretación que hacemos de cada coeficiente:

ϵ_1 y ϵ_2 representan la medida del crecimiento de ambas especies de forma natural.

σ_1 y σ_2 por el contrario, nos informan de la desaparición de cada una de las especies de forma natural al aumentar mucho la propia especie debido a una superpoblación, pues la rivalidad por la hierba aumenta y ésta es limitada.

α_1 y α_2 nos informan de la disminución de cada una de las poblaciones como consecuencia del encuentro y la competición por el mismo alimento (hierba).

b)

Vamos a determinar el tipo y la estabilidad de todos los puntos críticos de este sistema no lineal:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2 - 2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - y^2 - xy \end{cases}$$

Las coordenadas (x, y) de los puntos críticos han de satisfacer el sistema de ecuaciones algebraicas siguiente, ya que la definición de punto crítico nos dice que la derivada debe ser cero en dichos puntos:

$$\begin{cases} 3x - x^2 - 2xy = 0 \\ 2y - y^2 - xy = 0 \end{cases}$$

Sacando factor común x e y de ambas ecuaciones, tenemos:

$$\begin{cases} x(3 - x - 2y) = 0 \\ y(2 - y - x) = 0 \end{cases}$$

Vemos que el primer punto crítico es el $P_1 \equiv (0,0)$, que es trivial.

Despejando la abscisa x en la segunda ecuación y sustituyendo ese valor en la otra ecuación, llegamos a:

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

Obteniendo las raíces: $y = 1$, $y = 2$. Para tener la abscisa x de los puntos críticos sustituimos estas raíces en cualquiera de las ecuaciones del sistema anterior. Así, nuestros puntos críticos son

$$P_2 = (1,1)$$

$$P_3 = (0,2)$$

También despejando la ordenada y en la primera ecuación y sustituyendo ese valor en la otra ecuación, llegamos a:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Obteniendo las raíces $x = 1, x = 3$. Para tener la ordenada y de los puntos críticos sustituimos estas raíces en cualquiera de las ecuaciones del sistema. Resultando los puntos críticos:

$$P_2 = (1,1)$$

$$P_4 = (3,0)$$

Vemos que el $P_2 = (1,1)$ es el mismo que obtenemos anteriormente.

Entonces, tenemos cuatro puntos críticos:

$$P_1 \equiv (0,0)$$

$$P_2 = (1,1)$$

$$P_3 = (0,2)$$

$$P_4 = (3,0)$$

- **Analizamos $\boldsymbol{P_1 = (0,0)}$:**

El sistema linealizado en torno a $P_1 = (0,0)$ es:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

Comprobamos ahora que se trata de un punto crítico simple.

Para ello, se tienen que satisfacer dos condiciones.

El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema linealizado tiene que ser distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Por otra parte, los términos no lineales, $f(x,y)$ y $g(x,y)$, tienen que ser funciones con primeras derivadas parciales continuas para todo (x,y) y además:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

En nuestro caso y teniendo en cuenta las coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2-2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-(rcos\theta)^2 - 2r^2cos\theta sen\theta}{r} = 0$$

Para todo θ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-(rsen\theta)^2 - r^2 cos\theta sen\theta}{r} = 0$$

Para todo θ.

El punto crítico $P_1 = (0{,}0)$ es simple porque la función no lineal es suave, de derivada continua y la derivada de los términos no lineales es continua.

Su ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 3-m & 0 \\ 0 & 2-m \end{vmatrix} = m^2 - 5m + 6 = 0$$

Tiene por raíces $m_1 = 3$ y $m_2 = 2$, que son reales, positivas y distintas, por lo que el punto crítico $P_1 = (0{,}0)$ es un **nodo inestable**.

Para hacernos una idea de las trayectorias, calculamos los vectores directores:

$m_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3-m & 0 \\ 0 & 2-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

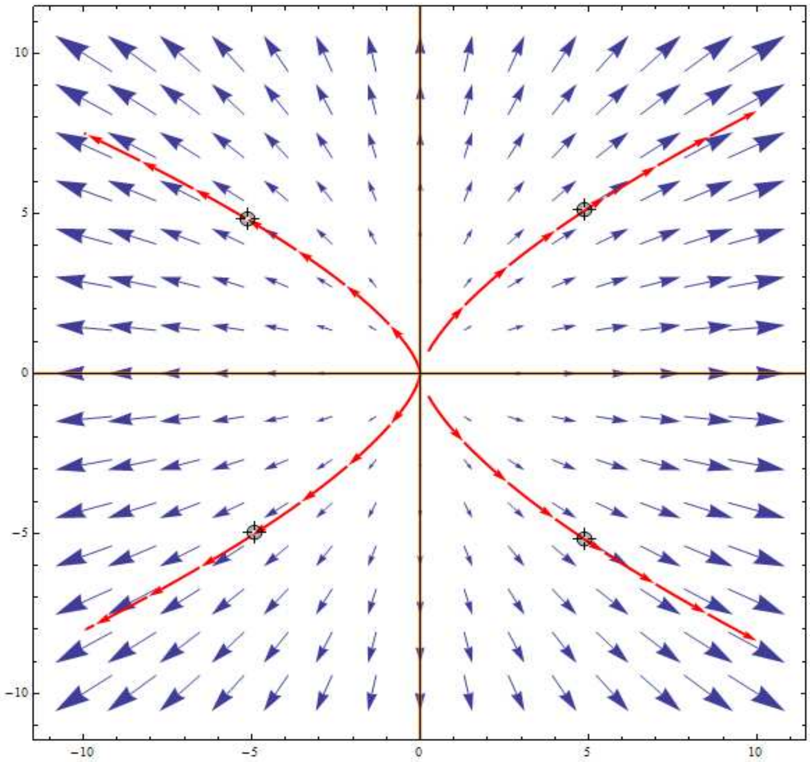
$$\begin{matrix} -B = 0 \\ A\ cualquiera \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$m_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A = 0 \\ B\ cualquiera \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si se representan las trayectorias, tenemos en cuenta que solo tiene sentido hablar del primer cuadrante de la gráfica puesto que hablamos de poblaciones.



- **Análisis de $P_2 = (1,1)$:**

Realizamos el cambio de coordenadas:

$$\begin{matrix} x = 1 + u \\ y = 1 + v \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{u} = 3(1+u) - (1+u)^2 - 2(1+u)(1+v) \\ \dot{v} = 2(1+v) - (1+v)^2 - (1+u)(1+v) \end{matrix}$$

Así, el nuevo sistema nos quedará operando:

$$\dot{u} = -2u - 2v - u^2 - 2uv$$
$$\dot{v} = -u - v - v^2 - uv$$

Y el sistema linealizado en torno al punto crítico $P_2 = (1,1)$:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u - 2v \\ \dot{v} = -u - v \end{cases}$$

De nuevo, este punto crítico es simple puesto que se verifican las condiciones:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{-u^2 - 2uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-(rcos\theta)^2 - 2r^2 cos\theta sen\theta}{r} = 0$$

Para todo θ.

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{-v^2 - uv}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-(rsen\theta)^2 - \mathrm{r}^2 cos\theta sen\theta}{r} = 0$$

Para todo θ.

La ecuación característica nos queda:

$$\begin{vmatrix} -1-m & -2 \\ -1 & -1-m \end{vmatrix} = m^2 + 2m - 1 = 0$$

Tenemos dos raíces de signo contrario y reales: $m_1 = -1+\sqrt{2}$ y $m_2 = -1-\sqrt{2}$.

Por tanto, $P_2 = (1,1)$ se trata de un **punto de silla**.

Calculamos los vectores directores:

$m_1 = -1+\sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} -1-m & -2 \\ -1 & -1-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -2 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

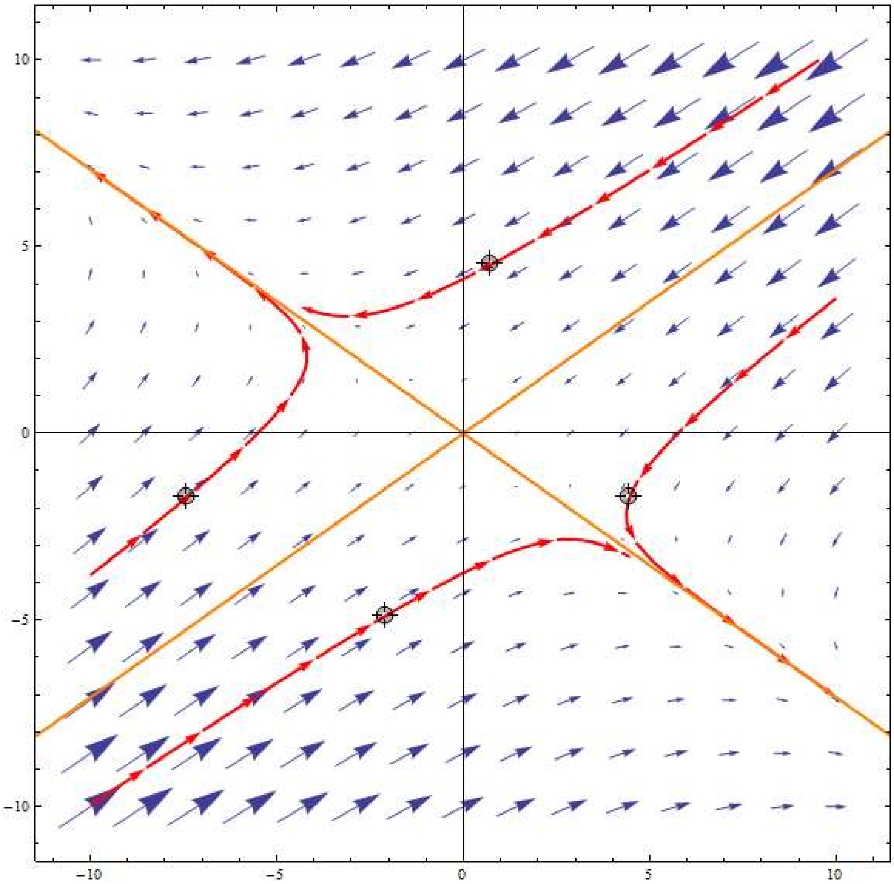
$$\begin{matrix} A = -\sqrt{2}B \\ B\ cualquiera \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \left(-\sqrt{2}, 1\right)$$

$m_1 = -1+\sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A = \sqrt{2}B \\ B\ cualquiera \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = \left(\sqrt{2}, 1\right)$$

Hacemos un esquema de las trayectorias y aquí podemos considerar todo el espacio puesto que el punto crítico se trata del $P_2 = (1,1)$ que se encuentra ya en el primer cuadrante.



- **Análisis de $P_3 = (0,2)$:**

Hacemos el cambio de coordenadas:

$$\begin{array}{c} x = u \\ y = 2 + v \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \dot{u} = 3u - u^2 - 2u(2+v) \\ \dot{v} = 2(2+v) - (2+v)^2 - u(2+v) \end{array}$$

Operando, obtenemos:

$$\dot{u} = -u - u^2 - 2uv$$
$$\dot{v} = -2u - 2v - uv - v^2$$

El sistema linealizado en torno al punto crítico $P_3 = (0,2)$ queda:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u \\ \dot{v} = -2u - 2v \end{cases}$$

El punto crítico $P_3 = (0,2)$ se trata de un punto crítico simple puesto que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{-u^2 - 2uv}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-(r\cos\theta)^2 - 2r^2\cos\theta sen\theta}{r} = 0$$

Para todo θ.

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{-v^2 - uv}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-(rsen\theta)^2 - \mathrm{r}^2\cos\theta sen\theta}{r} = 0$$

Para todo θ.

Hallamos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -1-m & 0 \\ -2 & -2-m \end{vmatrix} = m^2 + 3m + 2 = 0$$

Las raíces que obtenemos al resolver la ecuación son reales, distintas y negativas: $m_1 = -2$ y $m_2 = -1$, por lo que nuestro punto crítico será un **nodo asintóticamente estable**.

Calculamos los vectores directores:

$m_1 = -2$:

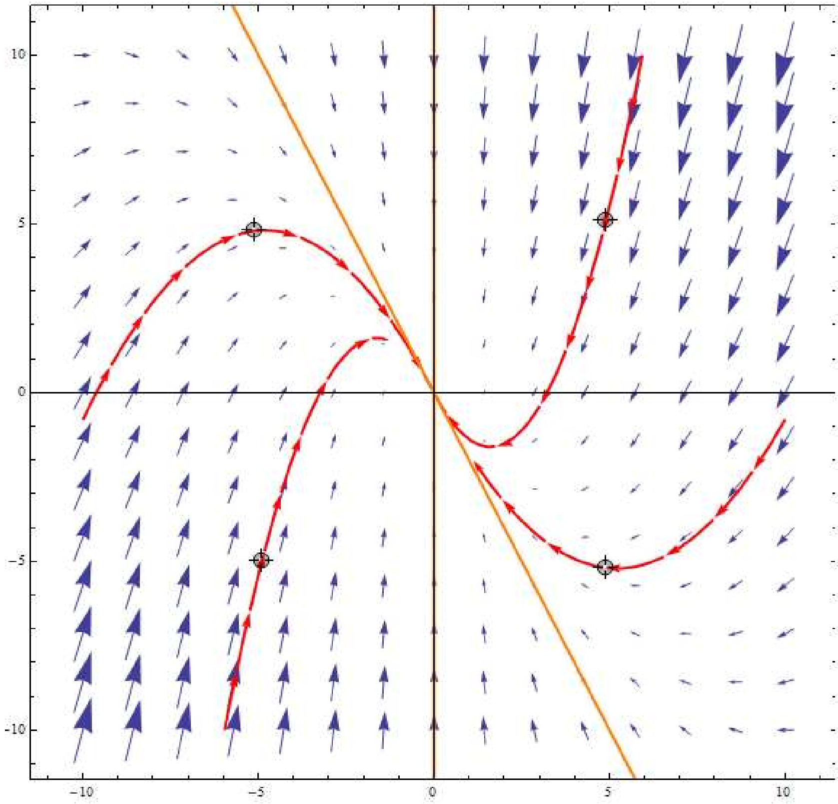
$$\begin{pmatrix} -1-m & 0 \\ -2 & -2-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A = 0 \\ B\ cualquiera \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = (0,1)$$

$m_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = -\frac{B}{2} \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = (-1,2)$$

La representación de las trayectorias del sistema linealizado en torno a este punto crítico es la siguiente, teniendo en cuenta que se trata del punto (0,2) consideramos tanto el primero como el cuarto cuadrante puesto que este punto se encuentra sobre el eje de ordenadas y al hacer el cambio de coordenadas, estos cuadrantes son aquellos en los que la población es positiva o nula, es decir, los cuadrantes en que $u > 0$.



- Análisis de $P_4 = (3{,}0)$:

Hacemos el cambio de coordenadas:

$$\begin{array}{c} x = 3 + u \\ y = v \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \dot{u} = 3(u+3) - (u+3)^2 - 2v(3+u) \\ \dot{v} = 2v - v^2 - v(3+u) \end{array}$$

Operando, obtenemos:

$$\dot{u} = -3u - u^2 - 2uv - 6v$$
$$\dot{v} = -v - uv - v^2$$

El sistema linealizado en torno al punto crítico $P_4 = (3{,}0)$ queda:

$$\begin{cases} \dot{u} = -3u - 6v \\ \dot{v} = -v \end{cases}$$

El punto crítico $P_4 = (3{,}0)$ se trata de un punto crítico simple puesto que:

$$\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{-u^2 - 2uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-(rcos\theta)^2 - 2r^2 cos\theta sen\theta}{r} = 0$$

Para todo θ.

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{-v^2 - \mathrm{uv}}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-(rsen\theta)^2 - \mathrm{r}^2 cos\theta sen\theta}{r} = 0$$

Para todo θ.

Hallamos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -3-m & -6 \\ 0 & -1-m \end{vmatrix} = m^2 + 4m + 3 = 0$$

Las raíces que obtenemos al resolver la ecuación son reales, distintas y negativas: $m_1 = -3$ y $m_2 = -1$, por lo que nuestro punto crítico será un **nodo asintóticamente estable**.

Calculamos los vectores directores:

$m_1 = -3$:

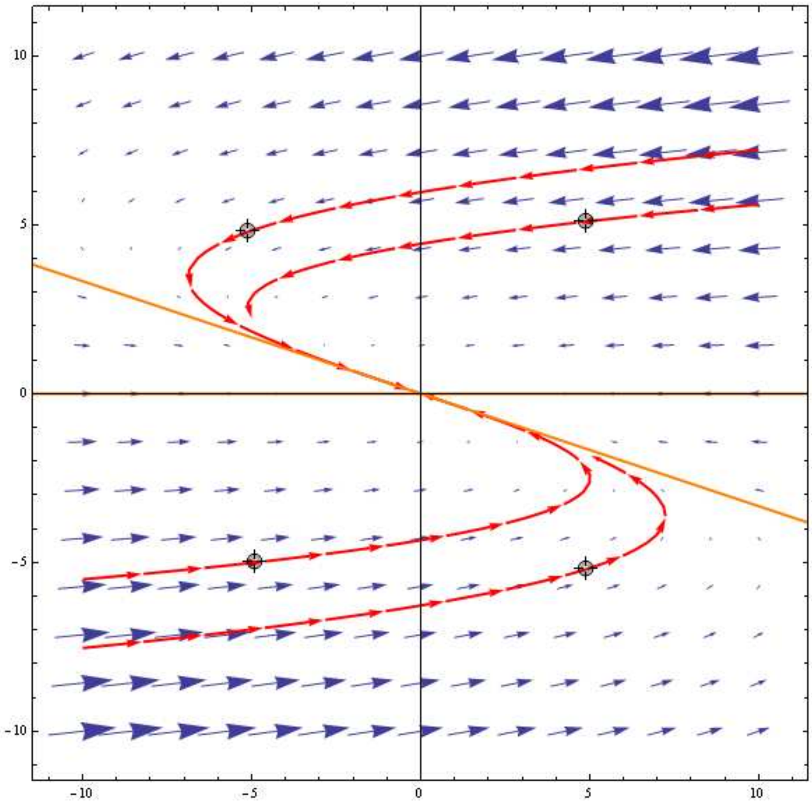
$$\begin{pmatrix} -3-m & -6 \\ 0 & -1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} B = 0 \\ A\ cualquiera \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = (1,0)$$

$m_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = -3B \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = (1,-3)$$

Por último, la representación de las trayectorias del sistema linealizado en torno a este punto crítico es la que corresponde, en este caso, al primer y segundo cuadrantes, que son aquellos en los que $v > 0$, puesto que el punto $P_4 = (3{,}0)$ está situado sobre el eje de abscisas y al hacer el cambio de coordenadas, la población que tiene sentido considerar es la referente a estos cuadrantes.



c)

Para representar las trayectorias en el diagrama de fases, tenemos ya en cuenta los cuatro puntos críticos obtenidos, y por tanto, en la representación gráfica vemos el efecto que producen los cuatro en el primer cuadrante ya que es en el que ambas poblaciones son positivas.

En el diagrama consideramos que el eje de abscisas representa la población de conejos y el eje de ordenadas la de ovejas.

Así, podemos observar que cuando aumenta mucho alguna de las dos poblaciones mientras que la otra aumenta de forma más suave, rápidamente disminuye la primera puesto que la hierba es limitada, mientras que la otra población al tener un crecimiento más suave, disminuye también de forma suave.

Por otra parte, si ambas poblaciones crecen más o menos al mismo ritmo, llegan a un punto en que comienzan a disminuir al mismo ritmo también puesto que el alimento se acaba, de esta forma, en el diagrama también observamos que por este motivo, nunca puede haber una excesiva población de ovejas o conejos.

Curiosamente podemos observar que las trayectorias tienden a $P_3 = (0,2)$ o a $P_4 = (3,0)$, es decir, parece que llega un punto en que se extingue, o bien la población de conejos, o bien la de ovejas. Esto se debe a que los coeficientes elegidos en las ecuaciones del modelo de Lotka–Volterra han sido seleccionados de tal forma que tengamos esos cuatro puntos críticos, por tanto, lo que comienza siendo un modelo real, no termina reflejando exactamente la realidad.