MÓNICA CAPILLA ALBA

JOSE ANTONIO PAREDES MORENO

JESÚS MANUEL GÓMEZ ROMERO

Halla la estabilidad de los puntos críticos del sistema:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})$$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{3}})$$

y determina sus trayectorias de modo cualitativo.

Vamos a estudiar la estabilidad de los puntos críticos del sistema no lineal que se nos presenta.

De forma general el sistema es:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + g(x,y)$$

En nuestro caso en particular:

$$\frac{dx}{dt} = y + yx$$

$$\frac{dx}{dt} = x + xy^3$$

Hallamos sus puntos críticos igualando a cero las derivadas:

$$0 = y + yx$$

$$0 = x + xy^3$$

cuyas soluciones son:

$$x = 0\,, y = 0$$

$$x = -1\,, y = -1$$

Vamos a ver si la combinación estas soluciones son puntos críticos simples. Para ello, se han de cumplir las siguientes condiciones:

a) La matriz de coeficientes ha de ser distinta de cero.
b) Las funciones f y g son funciones que deben tener las primeras derivadas parciales continuas para todo (x,y); y, además

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y \to 0,0} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

- Estudiemos la estabilidad para el punto x = 0, y = 0:

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

b)

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{\mathrm{yx}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}} = \lim_{x,y \to 0,0} \frac{\mathrm{xy}^3}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}} = 0$$

Usemos coordenadas polares:

$$x = rcos\vartheta$$

$$y = rsen\vartheta$$

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2 = r^2$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{rsen\vartheta rcos\vartheta}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{rcos\vartheta r^3 sen^3\vartheta}{r} = 0$$

$$\lim_{r \to 0} rsen\vartheta cos\vartheta = \lim_{r \to 0} cos\vartheta r^3 sen^3\vartheta = 0$$

(0,0) es un punto crítico simple

Analicemos este punto crítico. Tenemos que aplicar los teoremas tanto del *punto crítico* como de *la estabilidad del punto crítico.* Con este fin, vamos a estudiar el sistema linealizado en torno al punto que estamos tratando:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dx}{dt} = x$$

Buscamos soluciones al sistema de la forma:

$$x(t) = Ae^{mt}$$

$$y(t) = Be^{mt}$$

que, sustituyendo en el sistema:

$$Ame^{mt} = Be^{mt}$$

$$Bme^{mt} = Ae^{mt}$$

Simplificamos:

$$mA - B = 0$$

$$-A + mB = 0$$

Y hallamos su ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0$$

cuyas raíces son:

$$m = \pm 1$$

Hemos obtenido dos raíces reales y de signos opuestos. Entonces, tal y como nos dicen los teoremas, nos encontramos ante un ***punto de silla en (0,0)***, (inestable).

Lo siguiente a calcular es la ecuación de las trayectorias:

· Para $m_1 = 1$ tenemos:

$$0 = A - B$$

$$0 = -A + B$$

Con lo que $A = B$, y si $A = 1$, entonces tenemos: $\overrightarrow{\xi_1} = (1,1)$.

· Para $m_2 = -1$ tenemos:

$$-A - B = 0$$

$$-A - B = 0$$

Resolviendo: $B = -A$, y si $A = 1$, obtenemos: $\overrightarrow{\xi_2} = (-1,1)$

La solución general del sistema es:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \overrightarrow{\xi_1} e^{m_1 t} + C_2 \overrightarrow{\xi_2} e^{m_2 t}$$

y particularizando para nuestro caso:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}}$$

Entonces:

$$x(t) = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t}$$

$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$$

Las trayectorias de las fases vienen dadas por:

· Si $C_2 = 0$ ➔ $x = y$

· Si $C_1 = 0$ ➔ $x = -y$

· Si $C_1 \neq C_2 \neq 0$ ➔ $y = \frac{C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}}{C_1 e^{t} - C_2 e^{-t}} x$

Estudiemos dos límites de interés:

- $\lim_{t \to \infty} \frac{y}{x} = 1$ Las trayectorias son curvas que tienden hacia esta recta.
- $\lim_{t \to -\infty} \frac{y}{x} = -1$ Es el caso contrario, por tanto estamos ante un punto de silla, por supuesto, inestable.

- Estudiemos la estabilidad para el punto x = -1, y= -1:

Debemos hacer un cambio en el sistema de referencia para trasladar este punto al (0,0) y así poder estudiarlo.

$$\mu = x + 1$$

$$\psi = y + 1$$

Calculamos el nuevo sistema de ecuaciones para el origen trasladado:

$$\frac{d\mu}{dt} = (\psi - 1)(\mu) = -\mu + \psi\mu$$

$$\frac{d\psi}{dt} = (\mu - 1)(1 + (\psi - 1)^3) = (\mu - 1)(1 + \psi^3 - 3\psi^2 + 3\psi - 1)$$
$$= -3\psi + 3\psi^2 + \psi^3 + \psi^3\mu - 3\psi^2\mu + 3\psi\mu$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\mu + g(\mu, \psi)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -3\psi + g(\mu, \psi)$$

Aplicamos las condiciones a) y b) para este punto crítico (μ,ψ) = (0,0):

a)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

b)

$$\lim_{\mu,\psi \to 0,0} \frac{\mu\psi}{\sqrt{\mu^2 + \psi^2}} = \lim_{\mu,\psi \to 0,0} \frac{+3\psi^2 + \psi^3 + \psi^3\mu - 3\psi^2\mu + 3\psi\mu}{\sqrt{\mu^2 + \psi^2}} = 0$$

Tomando coordenadas polares:

$$\mu = rcos\vartheta$$

$$\psi = rsen\vartheta$$

$$\mu^2 + \psi^2 = r^2$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{rcos\vartheta rsen\vartheta}{r} = 0$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{+3r^2sen^2\vartheta + r^3sen^3\vartheta + r^3sen^3\vartheta rcos\vartheta - 3r^2sen^2\vartheta rcos\vartheta + 3rsen\vartheta rcos\vartheta}{r} = 0$$

Se cumple, entonces tenemos que es ***punto crítico simple*** en el nuevo sistema de referencia.

Analicemos este punto. El sistema linealizado del sistema original en torno al punto crítico que estamos tratando es:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\mu$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -3\psi$$

Buscamos soluciones al sistema de la forma (redefiniendo las constantes):

$$\mu(t) = Ae^{mt}$$

$$\psi(t) = Be^{mt}$$

que sustituyendo en el sistema:

$$Ame^{mt} = -Ae^{mt}$$

$$Bme^{mt} = -3Be^{mt}$$

Simplificamos:

$$Am + A = 0$$

$$Bm + 3B = 0$$

y despejamos:

$$A(m + 1) = 0$$

$$B(m + 3) = 0$$

La ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} m+1 & 0 \\ 0 & m+3 \end{vmatrix} = (m+1)(m+3)$$

Luego las soluciones son: $m_1 = -1 \; y \; m_2 = -3$; tenemos raíces reales, distintas y del mismo signo negativo, luego estamos ante un ***nodo asintóticamente estable en (-1,-1)***.

La ecuación de las trayectorias vendrá dada por:

· Para $m_1 = -1$ tenemos:

$$\overrightarrow{\sigma_1} = (0,1)$$

· Para $m_2 = -3$ tenemos:

$$\overrightarrow{\sigma_2} = (1,0)$$

Resolviéndolo como en el caso anterior.

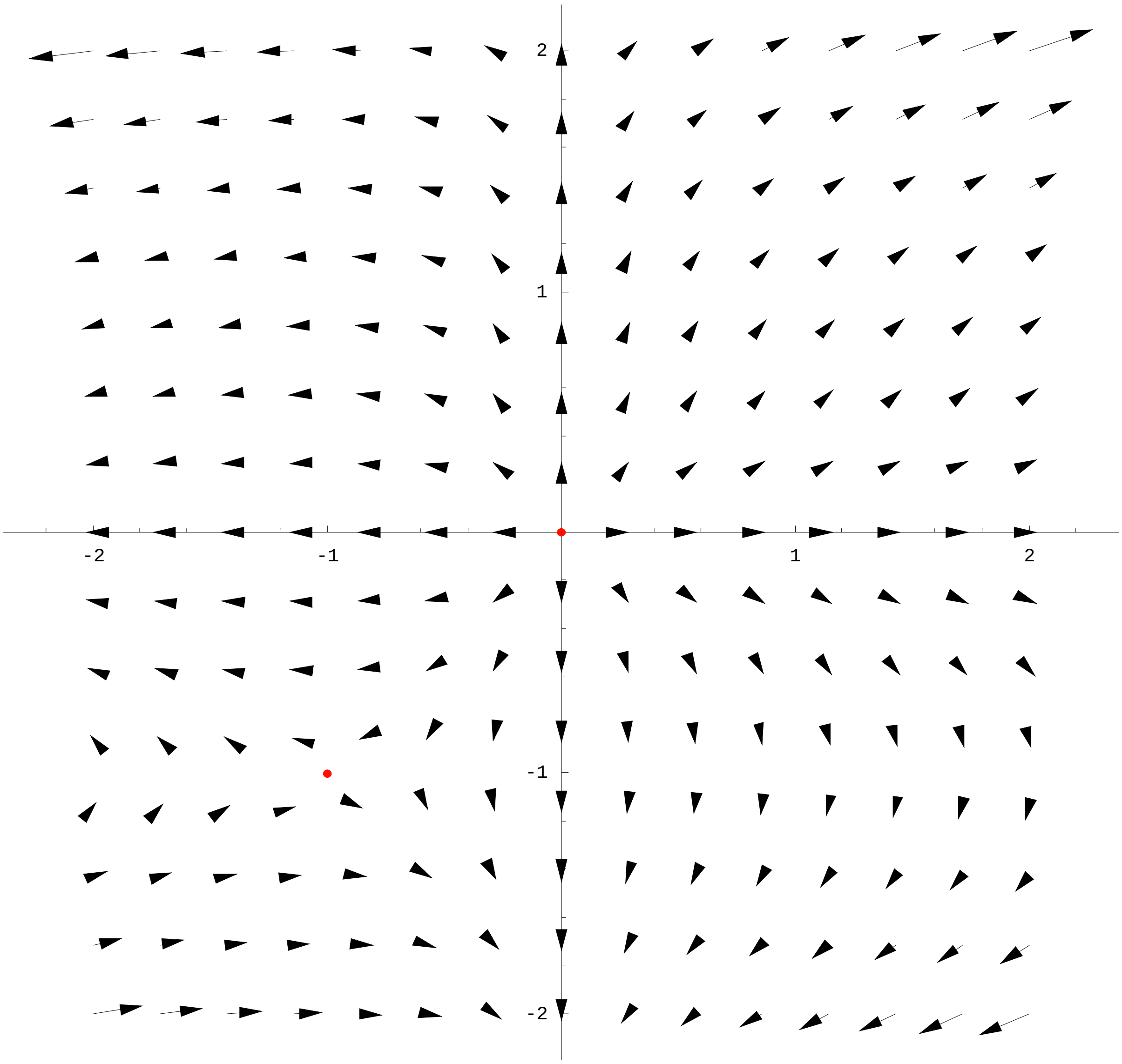
La solución general del sistema es:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \overrightarrow{\sigma_1} e^{m_1 t} + C_2 \overrightarrow{\sigma_2} e^{m_2 t}$$

Tomando nuestras soluciones:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}}$$

Ahora vamos a trazar las trayectorias. Para ello, nos ayudamos del campo de vectores generado por nuestro sistema de ecuaciones no lineal:



Se observa cómo las trayectorias se alejan del punto (0,0), en forma de punto de silla; y, en cambio, tienden asintóticamente al nodo (-1,-1).