CLARA GÓMEZ GARCÍA

Mª JESÚS MACÍAS CASTILLO

NOELIA SOLÍS PRECIADO

JUAN VILLA MORALES

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ECUACIONES INTEGRALES

PROBLEMA 11 HOJA 5

Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\boldsymbol{\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 sen(lnx)\varphi(y)dy}$$

Cuando (a) $\boldsymbol{g(x) = 0}$, (b) $\boldsymbol{g(x) = 2x}$, y (c) $\boldsymbol{g(x) = x - 1/2}$. Explica los resultados teniendo en cuenta el teorema de la alternativa de Fredholm.
NOTA: $\boldsymbol{\int_0^1 sen(lnx)dx = -1/2}$.

(a) **g(x)=0;** $\varphi(x) = 0 + \lambda \int_0^1 sen(lnx)\varphi(y)dy$

Se trata de una ecuación de Fredholm de segunda especie homogénea con núcleo separable. Entonces sin más pasamos a resolverla:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 sen(lnx)\varphi(y)dy$$

Sacamos de la integral lo que no depende de y,

$$\varphi(x) = \lambda sen(lnx) \int_0^1 \varphi(y)dy$$

Como la función $\varphi(y)$ no la conocemos, denotamos a la integral como una constante, que deberemos calcular

$$\int_0^1 \varphi(y)dy \equiv A$$

Entonces, la solución va a ser de la forma

$$\varphi(x) = \lambda A sen(lnx)$$

Sabemos que por definición

$$A = \int_0^1 \varphi(y)dy = \int_0^1 \lambda A sen(lny)dy = \lambda A \int_0^1 sen(lny)dy$$

Como nos dan el valor de esta integral, tenemos

$$A = -\frac{\lambda A}{2}$$

Por tanto, vemos que para que se cumpla esta relación sólo hay dos posibilidades:

I. **que A=0, que no nos interesa porque nos llevaría a la solución trivial.**
II. **que $\lambda = -2$, que es un autovalor de la función por ser una ecuación homogénea. En este caso la ecuación anterior sobre A se convierte en una identidad, por lo que A puede tomar cualquier valor constante. La solución viene dada por:**

$$\varphi(x) = \lambda A sen(lnx), \quad con\ \lambda = -2, y\ A\ cualquiera$$

Esto es la autofunción. Podemos expresarlo de manera reducida como sigue

$$\boxed{\varphi(x) = sen(lnx)}$$

Siendo esta la solución a nuestra ecuación integral.

(b) $g(x) = 2x,\ \varphi(x) = 2x + \lambda \int_0^1 sen(lnx)\varphi(y)dy$

Se trata de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie inhomogénea. Resolvemos igual que en el apartado anterior.

$$\varphi(x) = 2x + \lambda \int_0^1 sen(lnx)\varphi(y)dy$$

Sacamos de la integral lo que no depende de y,

$$\varphi(x) = 2x + \lambda sen(lnx) \int_0^1 \varphi(y)dy$$

Como la función $\varphi(y)$ no la conocemos, denotamos a la integral como una constante, que deberemos calcular

$$\int_0^1 \varphi(y)dy \equiv B$$

Entonces, la solución va a ser de la forma

$$\varphi(x) = 2x + \lambda B sen(lnx)$$

Sabemos que por definición

$$B = \int_0^1 \varphi(y)dy = \int_0^1 [2y + \lambda B sen(lny)]dy = \int_0^1 2ydy + \lambda B \int_0^1 sen(lny)dy$$

$$B = 1 - \frac{\lambda B}{2}$$

Entonces, vemos que

$$B = \frac{2}{2+\lambda}$$

Es decir, que nuestra ecuación, en general, tiene solución $\forall\lambda \neq -2$, y dicha solución es

$$\boxed{\varphi(x) = 2x + \lambda\left(\frac{2}{2+\lambda}\right) sen(lnx), \quad \forall\lambda \neq -2}$$

Veamos qué ocurre cuando $\lambda = -2$,

$$B = 1 - \frac{\lambda B}{2} = 1 + B$$

Vemos que esto no tiene solución, sea cual sea el valor de B.

Según el teorema estudiado, una ecuación integral inhomogénea tiene solución, en general, para cualquier valor de λ, excepto para los autovalores.

En nuestro caso, hay solución $\forall\lambda \neq -2$, porque $\lambda = -2$ es un autovalor de la autofunción de la integral homogénea.

(c) $g(x) = x - 1/2$, $\varphi(x) = x - \frac{1}{2} + \lambda \int_0^1 sen(lnx)\varphi(y)dy$

Se trata de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie inhomogénea. Resolvemos igual que en el apartado anterior.

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2} + \lambda \int_0^1 sen(lnx)\varphi(y)dy$$

Sacamos de la integral lo que no depende de y,

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2} + \lambda sen(lnx) \int_0^1 \varphi(y)dy$$

Como la función $\varphi(y)$ no la conocemos, denotamos a la integral como una constante, que deberemos calcular

$$\int_0^1 \varphi(y)dy \equiv C$$

Entonces, la solución va a ser de la forma

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2} + \lambda C sen(lnx)$$

Sabemos que por definición

$$C = \int_0^1 \varphi(y)dy = \int_0^1 \left[y - \frac{1}{2} + \lambda C sen(lny)\right] dy$$
$$= \int_0^1 ydy - \frac{1}{2}\int_0^1 dy + \lambda C \int_0^1 sen(lny)dy$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\lambda C}{2}$$

$$C = -\frac{\lambda C}{2}$$

Aquí, se nos vuelve a plantear la misma situación que en el apartado (a), y así veremos la diferencia existente entre una ecuación homogénea y una inhomogénea.

I. **En general, para que se cumpla la relación anterior tiene que darse que $C = 0$, entonces la solución sería**

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{1}{2}}$$

Sabemos que, en general, hay solución para cualquier valor de λ, excepto para $\lambda = -2$, que es un autovalor.

II. **Veamos qué sucede si $\lambda = -2$.**

En este caso la ecuación anterior se convierte en una identidad y cualquier valor de C es solución. Esto significa que la solución para $\lambda = -2$ sería

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2} + \lambda C sen(lnx)$$

Siendo C una constante cualquiera.

Por tanto, tenemos una solución no única agrupando $\lambda C \equiv C\,'$,

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{1}{2} + C\,' sen(lnx)}$$

¿Cómo es posible que la ecuación no homogénea tenga solución si el valor de lambda es igual a un autovalor? La respuesta nos la proporciona el último resultado del teorema de la alternativa de Fredholm.

El teorema de la alternativa de Fredholm nos dice que si λ es un autovalor, la ecuación inhomogénea tiene solución si, y solo si, la función $g(x)$ es tal que sea ortogonal con la autofunción $\varphi(x)$ del operador transpuesto $k(y,x)$ con autovalor $\lambda = -2$, es decir:

$$\int_a^b dx\, \varphi(x) g(x) = 0, \;\; con\, \varphi(x) = \lambda \int_a^b dy k(y,x)\varphi(y)$$

En nuestro caso, tenemos que

$$k(y,x) = sen(lny)$$

Calculamos la autofunción,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 dy\, sen(lny)\varphi(y)$$

Como no conocemos la función $\varphi(y)$, denominamos a la integral como una constante,

$$\int_0^1 dy\, sen(lny)\varphi(y) \equiv D$$

Entonces,

$$\varphi(x) = \lambda D$$

Por definición,

$$D = \int_0^1 dy\, sen(lny)\varphi(y) = \int_0^1 dy\, sen(lny)\lambda D = \lambda D \int_0^1 dy\, sen(lny)$$

$$D = -\frac{\lambda D}{2}$$

Como vemos obtenemos el mismo autovalor, $\lambda = -2$.

Por tanto, la autofunción correspondiente al núcleo transpuesto sería,

$$\varphi(x) = D'$$

Sólo tendremos que calcular la ortogonalidad entre esta autofunción y la función

$$g(x) = x - 1/2$$

Si sustituimos en la ecuación de arriba,

$$\int_0^1 dxD'\left(x - \frac{1}{2}\right) = D'\left[\int_0^1 xdx - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\right] = 0$$

Como queríamos demostrar. Por consiguiente, nos encontramos ante una de las excepciones del Teorema de la alternativa de Fredholm.