Métodos de la Física Matemática

Tema 5 – Ecuaciones Integrales Lineales

María F. Collado Caballero
Antonio E. Hurtado Romero
Esther Leal Cidoncha
Isabel Mª Martín Ríos

Hoja 5 - Problema 12º

Resuelve la ecuación integral

$$\varphi(x) = 1 + \lambda\int_0^{\pi} k(x,y)\varphi(y)dy$$

donde

$$k(x,y) = \begin{cases} \sin(x)\cos(y) & x \le y \\ \sin(y)\cos(x) & y \le x \end{cases}$$

Tenemos una ecuación integral de Fredholm no homogénea de segunda especie. Para resolverla la reduciremos a una ecuación diferencial con condiciones de contorno y obtendremos los autovalores λ_n y las autofunciones ψ_n para poder expresar la solución de esta forma:

$$\varphi(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\langle \psi_n | g \rangle}{\|\psi_n\|^2} \psi_n(x)$$

En primer lugar resolvemos la ecuación homogénea ($g(x) = 0$), para ello sustituimos $k(x,y)$ en $\varphi(x)$ y separamos la integral en dos intervalos. El primer intervalo $(0,x)$ para $x \le y$, y el segundo (x,π) para $y \le x$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda\int_0^{x} dy\varphi(y)\sin(x)\cos(y) + \lambda\int_x^{\pi} dy\varphi(y)\sin(y)\cos(x) \\ &= \lambda\left[\sin(x)\int_0^{x} dy\varphi(y)\cos(y) + \cos(x)\int_x^{\pi} dy\varphi(y)\sin(y)\right] \qquad (1)\end{aligned}$$

Aplicamos la regla de Leibnitz para obtener la primera y segunda derivada:

$$\varphi'(x) = \lambda\left[\cos(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) + \sin(x)\cos(x)\varphi(x) - \sin(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)\sin(y) - \sin(x)\cos(x)\varphi(x)\right] =$$
$$= \lambda\left[\cos(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) - \sin(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)\sin(y)\right] \qquad (2)$$

$$\varphi''(x) = \lambda\left[-\sin(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) + \cos^2(x)\varphi(x) - \cos(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)\sin(y) + \sin^2(x)\varphi(x)\right] =$$
$$= \lambda\left[\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)\varphi(x) - \sin(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) - \cos(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)\sin(y)\right] =$$
$$= \lambda\left[\varphi(x) - \sin(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) - \cos(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)\sin(y)\right] \qquad (3)$$

Podemos comprobar que el segundo y tercer miembro de $\varphi''(x)$ multiplicado por λ es igual a $\varphi(x)$, por tanto la ecuación (3) queda:

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) - \varphi(x) = (\lambda - 1)\varphi(x)$$

Tenemos que buscar las condiciones de contorno, para ello hacemos $x = 0$ en la primera derivada (2) y $x = \pi$ en la función (1).

$$c.c.\begin{cases}\varphi(\pi) = 0\\ \varphi'(0) = 0\end{cases}$$

Hemos reducido nuestra ecuación integral a un problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno homogéneas.

$$\varphi''(x) - (\lambda - 1)\varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c.c.\begin{cases}\varphi(\pi) = 0\\ \varphi'(0) = 0\end{cases}$$

Procedemos a resolver el problema. Tenemos tres casos:

1) $\lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$

La solución es del tipo: $\varphi(x) = Ax + B$ aplicando las condiciones de contorno, tenemos que $A = 0$ y $B = 0$ por lo que la única solución posible es la TRIVIAL.

2) $\lambda - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 1$

La solución es del tipo: $\varphi(x) = A\cosh\left(\sqrt{\lambda - 1}\right)x + B\sinh\left(\sqrt{\lambda - 1}\right)x$ y aplicando las c.c. llegamos a la solución TRIVIAL.

3) $\lambda - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda < 1$

La solución es del tipo: $\varphi(x) = A\cos\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x + B\sin\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x$

Aplicando las c.c. tenemos:

$$\begin{cases} B = 0 \\ A\cos\left(\pi\sqrt{1-\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\pi\sqrt{1-\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \pi\sqrt{1-\lambda} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi \end{cases}$$

Luego los autovalores son: $\lambda_n = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2$

Y sus autofunciones: $\psi_n(x) = \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x$

Ahora retomamos el caso particular en el que $g(x) = 1$, y la solución a la ecuación integral tendrá la forma:

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\langle \psi_n | 1 \rangle}{\|\psi_n\|^2} \psi_n(x)$$

Tenemos que calcular $\langle \psi_n | 1 \rangle$ y $\|\psi_n\|^2$:

$$\langle \psi_n | 1 \rangle = \int_0^{\pi} dx \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = \left. \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}} \right|_0^{\pi} = \frac{2}{2n+1}(-1)^n$$

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^{\pi} dx \cos^2\left(n + \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2}\frac{2n\pi + \pi - \sin(2n\pi)}{2n+1}$$

Finalmente, la solución nos queda:

$$\boxed{\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \lambda} \frac{4(-1)^n}{2n\pi + \pi - \sin(2n\pi)} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x} \qquad (4)$$

El problema ya está resuelto, pero ahora vamos a buscar una solución cerrada particularizando para $\lambda = 1$, en este caso el problema de Sturm-Liouville a resolver es:

$$\varphi''(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c.c.\begin{cases} \varphi(\pi) = 1 \\ \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

La solución a este problema es:

$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + Ax + B$$

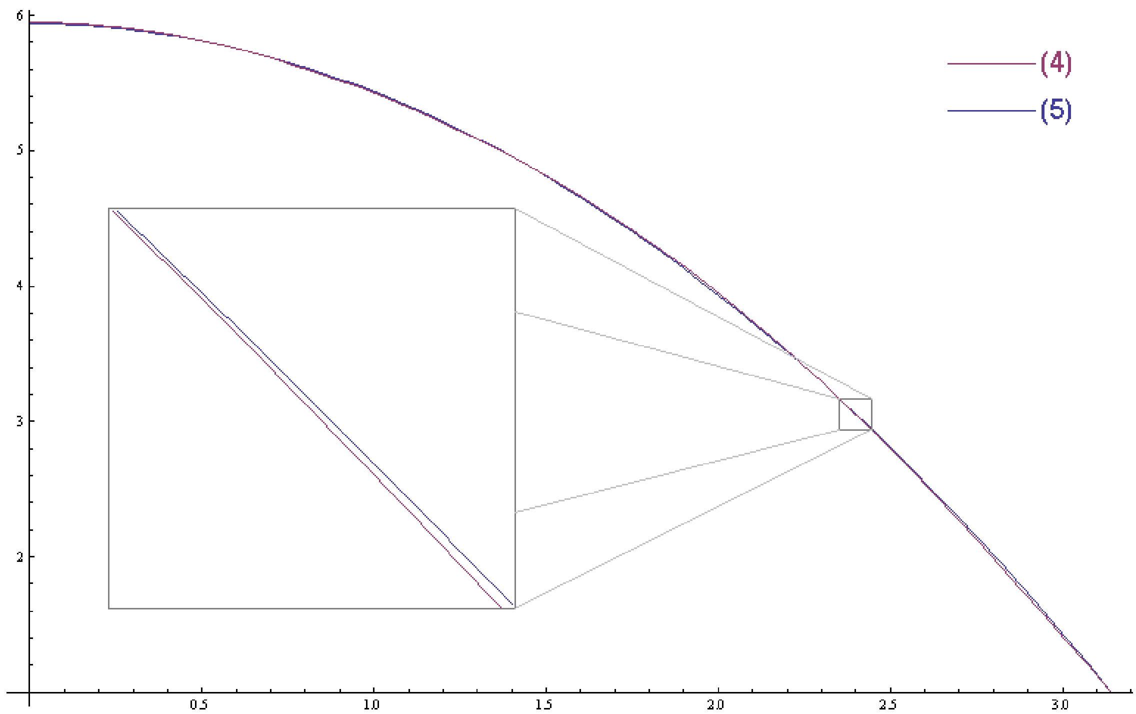
Aplicamos las condiciones de contorno para obtener A y B:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(\pi) = -\dfrac{\pi^2}{2} + A\pi + B = 1 \\ \varphi'(0) = -0 + A = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 + \dfrac{\pi^2}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo A y B en $\varphi(x)$ queda:

$$\boxed{\varphi(x) = 1 + \frac{\pi^2 - x^2}{2}} \qquad (5)$$

Para comprobar que la solución particular (5) es correcta la representamos gráficamente entre los límites de contorno $(0, \pi)$ junto a la solución en forma de desarrollo (4) con $\lambda = 1$ y truncada a los cinco primeros términos:



Vemos que ambas soluciones coinciden con bastante precisión.