HOJA 5
Ejercicio 13

Fraire González, Juan Jesús
Gordillo Guerrero, Fernando
Fernández Fernández, Ana Belén
Gerona Plá, Federico

Mayo 2009

Encuentra todas las posibles soluciones de la ecuación integral:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} dy\,\varphi(y)\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\,\cos(ny)}$$

cuando (a) $\boldsymbol{g(x) = 0}$ y (b) $\boldsymbol{g(x) = \operatorname{sen}(x)}$

Buscamos en la ecuación el núcleo y lo separamos, si podemos:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= g(x) + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} dy\,\varphi(y)\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\,\cos(ny)\\ &= g(x) + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\underbrace{\int_0^{2\pi} dy\,\varphi(y)\,\cos(ny)}_{c_n}\end{aligned}$$

Si tenemos cuál es la forma de $\varphi(x)$ también tenemos la forma de $\varphi(y)$:

$$\boxed{\varphi(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\,c_n} \Rightarrow \tag{1}$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = g(y) + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(ny)\,c_n$$

Una vez identificado el coeficiente c_n sólo tenemos que averiguar cuánto vale para un valor determinado m:

$$\begin{aligned}c_m &= \int_0^{2\pi} dy\,\varphi(y)\cos(my) = \int_0^{2\pi} dy\,\left[g(y) + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(ny)\,c_n\right]\cos(my) =\\ &= \int_0^{2\pi} dy\,g(y)\cos(my) + \int_0^{2\pi} dy\frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(ny)\,c_n\cos(my) =\\ &= \int_0^{2\pi} dy\,g(y)\cos(my) + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_0^{2\pi} dy\cos(ny)\cos(my) =\\ &= \int_0^{2\pi} dy\,g(y)\cos(my) + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\pi\,\delta_{nm} = \int_0^{2\pi} dy\,g(y)\cos(my) + \lambda\,c_m\end{aligned}$$

Y si despejamos c_m:

$$c_m = \int_0^{2\pi} dy\,g(y)\cos(my) + \lambda\,c_m \Rightarrow c_m - \lambda\,c_m = \int_0^{2\pi} dy\,g(y)\cos(my) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c_m(1-\lambda) = \int_0^{2\pi} dy\,g(y)\cos(my)} \Rightarrow \tag{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_m = \frac{1}{1-\lambda}\int_0^{2\pi} dy\,g(y)\cos(my)} \tag{3}$$

Entonces, si introducimos (3) en (1) la fórmula general para la resolución de ecuaciones del tipo de las del problema (con $\lambda \neq 1$):

$$\boxed{\varphi(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{1-\lambda}\int_0^{2\pi} dy\, g(y)\cos(ny)}$$

Pero tenemos un caso especial, y es cuando $\lambda = 1$ y la integral que aparece en la ecuación (2) es cero:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 1 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} dy\, g(y)\cos(my) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow c_n\cancelto{0}{(1-\lambda)} = \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} dy\, g(y)}\cos(my) \Rightarrow c_m \cdot 0 = 0$$

Entonces tenemos que no importa el valor de c_n para que se satisfaga la igualdad, por lo que c_n puede ser cualquiera.

$$\begin{aligned} c_1 \cdot 0 &= 0 \\ c_2 \cdot 0 &= 0 \\ c_3 \cdot 0 &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ c_n \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, las autofunciones asociadas al valor $\lambda = 1$ son infinitas, pero recordemos que c_n lo podemos elegir nosotros. Si tenemos que la solución final será del tipo $\varphi(x) = g(x) + \psi_n(x)$ y los valores de $\psi_n(x)$ los siguientes

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\, c_1 \qquad \left\{\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_n = 0,\ n \neq 1 \end{array}\right. \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\cos(x)\cancelto{1}{c_1} + \cos(2x)\cancelto{0}{c_2} + \cos(3x)\cancelto{0}{c_3} + \dots\right) = \frac{1}{\pi}\cos(x) \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\, c_2 \qquad \left\{\begin{array}{l} c_2 = 1 \\ c_n = 0,\ n \neq 2 \end{array}\right. \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\cos(x)\cancelto{0}{c_1} + \cos(2x)\cancelto{1}{c_2} + \cos(3x)\cancelto{0}{c_3} + \dots\right) = \frac{1}{\pi}\cos(2x) \\ &\vdots \\ \psi_m(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\, c_m \qquad \left\{\begin{array}{l} c_m = 1 \\ c_n = 0,\ n \neq m \end{array}\right. \\ &= \frac{1}{\pi}\cos(mx) = \cos(mx) \end{aligned}$$

NOTA: Sabemos que $\psi_n(x) = \frac{1}{\pi}\cos(mx) = \cos(mx)$ porque son autofunciones, y una autofunción multiplicada por un escalar es la misma autofunción.

Tenemos que la solución final para $\lambda = 1$ es:

$$\varphi(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \tag{4}$$

Resolvamos ahora los dos apartados del ejercicio:

- $g(x) = 0$:
  - Para $\lambda \neq 1$:

$$\varphi(x) = \cancelto{0}{g(x)} + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1-\lambda} \int_0^{2\pi} dy\, \cancelto{0}{g(y)} \cos(my) \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = 0}$$

  - Para $\lambda = 1$:

$$\varphi(x) = \cancelto{0}{g(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)}$$

- $g(x) = \operatorname{sen}(x)$:
  - $\lambda \neq 1$

$$\varphi(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1-\lambda} \int_0^{2\pi} dy \operatorname{sen}(y) \cos(my) =$$

$$= \operatorname{sen}(x) + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1-\lambda} \int_0^{2\pi} dy\, \cancelto{0}{\frac{\cos(y)\cos(my) + m \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(my)}{m^2 - 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \operatorname{sen}(x)}$$

  - Para $\lambda = 1$:

$$\boxed{\varphi(x) = \operatorname{sen}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)}$$