Problema 14 de la quinta hoja de ejercicios

Grupo nº 5

Antonio Castaño Tierno
Víctor Pablo Galván Chacón
Ramón Julián Parejo Cuellar
Jesús Miguel Simón Martín

Métodos de la física matemática
Física, Universidad de Extremadura
Curso 2008-2009

14.- Resuelve la ecuación integral

$$f(x) = x - \lambda \int_0^x \left(senh(x-y) f(y) dy \right)$$

Derivamos dos veces f(x) y tenemos:

$$f'(x) = 1 - \lambda senh(x-x) f(x) - \lambda \int_0^x \cosh(x-y) f(y) dy = 1 - \lambda \int_0^x \cosh(x-y) f(y) dy$$

$$f''(x) = -\lambda \cosh(x-x) f(x) - \lambda \int_0^x sen\mathrm{h}(x-y) f(y) dy$$

$$f''(x) = -\lambda f(x) + f(x) - x = -x - (\lambda - 1) f(x)$$

Para resolver la ecuación diferencial

$$f''(x) = -x - (\lambda - 1) f(x)$$

consideraremos tres casos:

a) $\lambda = 1$

$$f''(x) = -x$$

$$f(x) = A + Bx - \frac{x^3}{6}$$

Como se trata de una ecuación de Volterra, aplicamos las condiciones iniciales para hallar los coeficientes A y B:

$$f(0) = A = 0$$

$$f'(0) = B = 1$$

Por lo tanto, la solución para este caso es:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

b) $\lambda < 1$

$$f''(x) = -x - (\lambda - 1) f(x)$$

$$f(x) = \frac{x}{-(\lambda-1)} + (A+B)\cosh(\sqrt{1-\lambda}x) + (A-B)senh(\sqrt{1-\lambda}x)$$

Aplicamos las condiciones iniciales y encontramos la solución:

$$f(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$f'(0) = \frac{1}{-(\lambda-1)} + \sqrt{1-\lambda}(A-B) = 1 \Rightarrow A = \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}$$

$$f(x) = -\frac{x}{\lambda-1} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} senh\sqrt{1-\lambda}x$$

c) $\lambda > 1$

$$f''(x) = -x - (\lambda - 1) f(x)$$

$$f(x) = -\frac{x}{\lambda-1} + A\cos\sqrt{\lambda-1} + Bsen\sqrt{\lambda-1}x$$

Aplicamos las condiciones iniciales:

$$f(0) = A = 0$$

$$f'(0) = -\frac{1}{\lambda-1} + B\sqrt{\lambda-1} = 1 \Rightarrow B = \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}$$

$$f(x) = -\frac{x}{\lambda-1} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}} sen\sqrt{\lambda-1}x$$

Vemos que las tres soluciones son válidas en todo el rango para el que las hemos calculado.