Mónica Capilla Alba

Jesús M. Gómez Romero

Ejercicio 15, Hoja de Problemas 5

a) Halla los autovalores y las autofunciones de la ecuación integral siguiente:

$$\gamma(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + xy)xy\, \gamma(y)dy$$

b) Halla todas las soluciones posibles de la ecuación integral siguiente:

$$\gamma(x) = x^3 + \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + xy)xy\, \gamma(y)dy$$

==

a) Tenemos una ecuación homogénea con núcleo separable, de manera que podemos realizar las siguientes operaciones:

$$\gamma(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + xy)xy\, \gamma(y)dy$$

$$\gamma(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^3y + y^3x + x^2y^2)\, \gamma(y)dy$$

$$\gamma(x) = \lambda \int_{-1}^{1} x^3(y)\, \gamma(y)dy + \lambda \int_{-1}^{1} x(y^3)\, \gamma(y)dy + \lambda \int_{-1}^{1} x^2(y^2)\, \gamma(y)dy =$$

$$\gamma(x) = \lambda x^3 \int_{-1}^{1} (y)\, \gamma(y)dy + \lambda x \int_{-1}^{1} (y^3)\, \gamma(y)dy + \lambda x^2 \int_{-1}^{1} (y^2)\, \gamma(y)dy =$$

$$\gamma(x) = \lambda x(c_1x^2 + c_2 + xc_3)\ (1)$$

$$\gamma(y) = \lambda y(c_1y^2 + c_2 + yc_3)(2)$$

Siendo:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} (y)\, \gamma(y)dy$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} (y^3)\, \gamma(y)dy$$

$$c_3 = \int_{-1}^{1} (y^2)\, \gamma(y)dy$$

Donde para hallar el valor de las constantes necesitamos utilizar la relación (2). Para la primera:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} (y)\, \gamma(y) dy = \int_{-1}^{1} (y)\, \lambda y(c_1 y^2 + c_2 + y c_3) dy$$

$$c_1 = \lambda \int_{-1}^{1} (c_1 y^4 + c_2 y^2 + c_3 y^3)\, dy$$

$$c_1 = \frac{2}{5}\lambda c_1 + \frac{2}{3}\lambda c_2$$

$$c_1\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) - \frac{2}{3}\lambda c_2 = 0$$

Para la segunda:

$$c_2 = \int_{-1}^{1} (y^3)\, \gamma(y) dy = \int_{-1}^{1} (y^3)\, \lambda y(c_1 y^2 + c_2 + y c_3) dy$$

$$c_2 = \lambda \int_{-1}^{1} (c_1 y^6 + c_2 y^4 + y^5 c_3) dy$$

$$c_2 = \frac{2}{7}\lambda c_1 + \frac{2}{5}\lambda c_2$$

$$-\frac{2}{7}\lambda c_1 + c_2\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) = 0$$

Para la tercera:

$$c_3 = \int_{-1}^{1} (y^2)\, \gamma(y) dy = \int_{-1}^{1} (y^2)\, \lambda y(c_1 y^2 + c_2 + y c_3) dy$$

$$c_3 = \lambda \int_{-1}^{1} (c_1 y^5 + c_2 y^3 + y^4 c_3) dy$$

$$c_3 = \frac{2}{5}\lambda c_3$$

$$c_3\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) = 0$$

Luego nos ha quedado un sistema que presenta la siguiente forma:

$$c_1\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) - \frac{2}{3}\lambda c_2 = 0$$

$$-\frac{2}{7}\lambda c_1 + c_2\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) = 0$$

$$c_3\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) = 0$$

Hemos de hallar los autovalores de este sistema que son los ceros del determinante de la matriz de sus coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{2}{5}\lambda & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considerándose la siguiente matriz:

$$|M| = \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)|M_1|$$

Puedo observar que:

$$\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}$$

Los otros autovalores vendrán dados por la matriz siguiente:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 1-\frac{2}{5}\lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{7} & 1-\frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 0 = 16\lambda^2 + 420\lambda - 525$$

$$\lambda_2 = \frac{-105+25\sqrt{21}}{8}$$

$$\lambda_3 = \frac{-105-25\sqrt{21}}{8}$$

Opero las dos primeras ecuaciones del sistema para obtener una relación entre sus constantes:

$$c_1\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) - \frac{2}{3}\lambda c_2 = 0 ==> \frac{c_2}{c_1} = \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)\frac{3}{2\lambda}$$

$$-\frac{2}{7}\lambda c_1 + c_2\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) = 0 ==> \frac{c_2}{c_1} = \frac{2\lambda}{7}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)}$$

$$c_3\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) = 0$$

Tenemos que hallar las soluciones del sistema particularizando cada valor del parámetro λ, sustituyéndolos en las ecuaciones obtenidas:

$\lambda_1 = \frac{5}{2}$	$\lambda_2 = \frac{-105 + 25\sqrt{21}}{8}$	$\lambda_3 = \frac{-105 - 25\sqrt{21}}{8}$
$c_1 = 0$	$c_1 \neq 0$	$c_1 \neq 0$
$c_2 = 0$	$c_2 \neq 0$	$c_2 \neq 0$
$c_3 \neq 0$	$c_3 = 0$	$c_3 = 0$
$\gamma(x) = \lambda x(xc_3)$ $\gamma(x) = x^2$	$\gamma(x) = \lambda x(c_1x^2 + c_2)$ $\gamma(x) = \lambda x\left(x^2 + \frac{c_2}{c_1}\right)$ $\gamma(x) = \lambda x\left(x^2 + \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)\frac{3}{2}\right)$ $\gamma(x) = x\left(x^2 + \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)\frac{3}{2\lambda}\right)$ $\gamma(x) = x^3 + \sqrt{\frac{3}{7}x}$	$\gamma(x) = \lambda x(c_1x^2 + c_2)$ $\gamma(x) = \lambda x\left(x^2 + \frac{c_2}{c_1}\right)$ $\gamma(x) = \lambda x\left(x^2 + \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)\frac{3}{2}\right)$ $\gamma(x) = x\left(x^2 + \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)\frac{3}{2\lambda}\right)$ $\gamma(x) = x^3 - \sqrt{\frac{3}{7}x}$

Siendo estas últimas las autofunciones correspondiente a cada uno de los autovalores obtenidos.

==

b)

Esta ecuación se opera de la misma manera que la anterior pero teniendo en cuenta el término g(x)=x^3 presente en la misma.

$$\gamma(x) = x^3 + \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + xy)xy\, \gamma(y)dy$$

$$\gamma(x) = x^3 + \lambda \int_{-1}^{1} (x^3y + y^3x + x^2y^2)\, \gamma(y)dy$$

$$\gamma(x) = x^3 + \lambda \int_{-1}^{1} x^3(y)\, \gamma(y)dy + \lambda \int_{-1}^{1} x(y^3)\, \gamma(y)dy + \lambda \int_{-1}^{1} x^2(y^2)\, \gamma(y)dy$$

$$\gamma(x) = x^3 + \lambda x^3 \int_{-1}^{1} (y)\, \gamma(y)dy + \lambda x \int_{-1}^{1} (y^3)\, \gamma(y)dy + \lambda x^2 \int_{-1}^{1} (y^2)\, \gamma(y)dy$$

$$\gamma(x) = x^3 + \lambda x(c_1x^2 + c_2 + xc_3)$$

$$\gamma(y) = y^3 + \lambda y(c_1y^2 + c_2 + yc_3)$$

Siendo:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} (y)\, \gamma(y) dy$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} (y^3)\, \gamma(y) dy$$

$$c_3 = \int_{-1}^{1} (y^2)\, \gamma(y) dy$$

Determinamos la primera integral:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} (y)\, \gamma(y) dy = \int_{-1}^{1} (y)\, (y^3 + \lambda y(c_1 y^2 + c_2 + y c_3) dy$$

$$c_1 = \int_{-1}^{1} (y^4 + \lambda c_1 y^4 + \lambda c_2 y^2 + \lambda y^3 c_3) dy$$

$$c_1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\lambda c_1 + \frac{2}{3}\lambda c_2$$

$$c_1 \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) - \frac{2}{3}\lambda c_2 = \frac{2}{5}$$

Determinamos la segunda integral:

$$c_2 = \int_{-1}^{1} (y^3)\, \gamma(y) dy = \int_{-1}^{1} (y^3)\, (y^3 + \lambda y(c_1 y^2 + c_2 + y c_3) dy =$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} (y^6 + \lambda c_1 y^6 + \lambda c_2 y^4 + \lambda y^5 c_3) dy$$

$$c_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\lambda c_1 + \frac{2}{5}\lambda c_2$$

$$-\frac{2}{7}\lambda c_1 + c_2 \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) = \frac{2}{7}$$

Determinamos la tercera integral:

$$c_3 = \int_{-1}^{1} (y^2)\, \gamma(y) dy = \int_{-1}^{1} (y^2)\, (y^3 + \lambda y(c_1 y^2 + c_2 + y c_3) dy =$$

$$c_3 = \int_{-1}^{1} (y^5 + \lambda c_1 y^5 + \lambda c_2 y^3 + \lambda y^4 c_3) dy$$

$$c_3 = \frac{2}{5}\lambda c_3$$

$$c_3\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)=0$$

El sistema de ecuaciones obtenido es el siguiente:

$$c_1\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)-\frac{2}{3}\lambda c_2=\frac{2}{5}$$

$$-\frac{2}{7}\lambda c_1+c_2\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)=\frac{2}{7}$$

$$c_3\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)=0$$

Se puede observar que para cualquier parámetro λ distinto de los autovalores que se obtendrían para este sistema de ecuaciones, la ecuación integral quedaría resuelta de la siguiente manera:

$$\gamma(x)=\lambda x\left(\frac{16\lambda+210}{16\lambda^2+420\lambda-525}\quad x^2+\frac{150}{16\lambda^2+420\lambda-525}\right)$$

Donde:

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{2}{3}\lambda \\ \frac{2}{7} & \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) & -\frac{2}{3}\lambda \\ -\frac{2}{7}\lambda & \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)\end{vmatrix}}=\frac{16\lambda+210}{16\lambda^2+420\lambda-525}$$

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix}\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{7}\lambda & \frac{2}{7}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) & -\frac{2}{3}\lambda \\ -\frac{2}{7}\lambda & \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)\end{vmatrix}}=\frac{150}{16\lambda^2+420\lambda-525}$$

$$c_3=0$$

Particularizando para nuestros autovalores:

Si:

$$\lambda_1=\frac{5}{2}$$

$$c_1\left(1-\frac{2}{5}\frac{5}{2}\right)-\frac{2}{3}\frac{5}{2}c_2=\frac{2}{5}$$

$$-\frac{2}{7}\frac{5}{2}c_1+c_2\left(1-\frac{2}{5}\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{7}$$

$$c_3\left(1-\frac{2}{5}\frac{5}{2}\right)=0$$

$$\gamma(x)=x^3+\frac{5}{2}x(\frac{2}{5}x^2+\frac{6}{25}+\ c_3x)$$

Si:

$$\lambda_2=\frac{-105+25\sqrt{21}}{8}$$

O

$$\lambda_3=\frac{-105-25\sqrt{21}}{8}$$

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{2}{3}\lambda\\ \frac{2}{7} & \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) & -\frac{2}{3}\lambda\\ -\frac{2}{7}\lambda & \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)\end{vmatrix}}=\frac{16\lambda+210}{16\lambda^2+420\lambda-525}$$

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix}\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) & \frac{2}{5}\\ -\frac{2}{7}\lambda & \frac{2}{7}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right) & -\frac{2}{3}\lambda\\ -\frac{2}{7}\lambda & \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)\end{vmatrix}}=\frac{150}{16\lambda^2+420\lambda-525}$$

$$c_3\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)=0$$

El sistema de ecuaciones no tendrá solución, por tanto no hay solución de la ecuación integral, ya que hay que tener en cuenta que estos autovalores no forman parte de la dominio de la función a analizar, ya que hacen cero en los denominadores de las constantes $c_1 y\ c_2$.