Tema 5

Ejercicio 4

Grupo 2

4.

a) Encuentra los autovalores y las autofunciones de la ecuación integral:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \lambda x \int_{-1}^{1} dy\, y(x-y)^2 \varphi(y).}$$

b) Dada la siguiente ecuación integral no homogénea:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = g(x) - \frac{5}{4} x \int_{-1}^{1} dy\, y(x-y)^2 \varphi(y),}$$

Halla su solución utilizando el apartado anterior, o explica su ausencia, si (i) $\boldsymbol{g(x) = x^2}$ y (ii) $\boldsymbol{g(x) = x}$.

a) Dado que la ecuación integral propuesta es de la forma:

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_{a}^{b} dy\, k(x,y) \varphi(y)$$

Donde,

$g(x) = 0$

$k(x,y) = y\,(x-y)^2$

Del cual, se puede apreciar que es un núcleo degenerado o separable, ya que se puede escribir como:

$k(x,y) = y\,(x^2 - 2xy + y^2) = yx^2 - 2xy^2 + y^3$

De modo que la ecuación dada, quedaría:

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-1}^{1} dy (yx^2 - 2xy^2 + y^3)\, \varphi(y)$$

Que podemos expresar como

$$\varphi(x) = \lambda x^3 \int_{-1}^{1} dy\, y\varphi(y) - 2\lambda x^2 \int_{-1}^{1} dy y^2 \varphi(y) + \lambda x \int_{-1}^{1} y^3 \varphi(y)$$

Si llamamos,

$$\int_{-1}^{1} dy\, y\varphi(y) \equiv A \qquad \int_{-1}^{1} dy y^2 \varphi(y) \equiv B \qquad \int_{-1}^{1} y^3 \varphi(y) \equiv C$$

La solución buscada tendrá la forma siguiente,

$$\boxed{\varphi(x) = \lambda x^3 A - 2\lambda x^2 B + \lambda x C}$$

De manera que, a falta de determinar las constantes A,B y C, tenemos la solución. Para determinarlas, partimos de sus definiciones correspondientes, de modo que,

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{1} dy\, y\varphi(y) &= \int_{-1}^{1} dy\, y\ \left(\lambda y^3 A - 2\lambda y^2 B + \lambda y C\right) \\ &= \lambda A \int_{-1}^{1} dy\, y^4 - 2\lambda B \int_{-1}^{1} dy\, y^3 + \lambda C \int_{-1}^{1} dy\, y^2 \\ &= \lambda A \frac{y^5}{5}\Big|_{-1}^{1} - 2\lambda B \frac{y^4}{4}\Big|_{-1}^{1} + \lambda C \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \lambda A \frac{2}{5} + \lambda C \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Obtenemos,

$$A\left(\lambda \frac{2}{5} - 1\right) + \lambda C \frac{2}{3} = 0$$

Seguiremos el mismo procedimiento para B y C,

$$\begin{aligned} B = \int_{-1}^{1} dy\, y^2\varphi(y) &= \int_{-1}^{1} dy\, y^2\ \left(\lambda y^3 A - 2\lambda y^2 B + \lambda y C\right) \\ &= \lambda A \int_{-1}^{1} dy\, y^5 - 2\lambda B \int_{-1}^{1} dy\, y^4 + \lambda C \int_{-1}^{1} dy\, y^3 \\ &= \lambda A \frac{y^6}{6}\Big|_{-1}^{1} - 2\lambda B \frac{y^5}{5}\Big|_{-1}^{1} + \lambda C \frac{y^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = -\lambda B \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = \int_{-1}^{1} dy\, y^3\varphi(y) &= \int_{-1}^{1} dy\, y^3\ \left(\lambda y^3 A - 2\lambda y^2 B + \lambda y C\right) \\ &= \lambda A \int_{-1}^{1} dy\, y^6 - 2\lambda B \int_{-1}^{1} dy\, y^5 + \lambda C \int_{-1}^{1} dy\, y^4 \\ &= \lambda A \frac{y^7}{7}\Big|_{-1}^{1} - 2\lambda B \frac{y^6}{6}\Big|_{-1}^{1} + \lambda C \frac{y^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \lambda A \frac{2}{7} + \lambda C \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Escribiendo las tres ecuaciones que hemos obtenido, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A\left(\lambda\frac{2}{5}-1\right)+\lambda C\frac{2}{3}=0 \\ B\left(\lambda\frac{4}{5}+1\right)=0 \\ C\left(\lambda\frac{2}{5}-1\right)+\lambda A\frac{2}{7}=0 \end{cases}$$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial, el determinante de la matriz de los coeficientes ha de ser igual a cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} \left(\lambda\frac{2}{5}-1\right) & 0 & \lambda\frac{2}{3} \\ 0 & \left(\lambda\frac{4}{5}+1\right) & 0 \\ \lambda\frac{2}{7} & 0 & \left(\lambda\frac{2}{5}-1\right) \end{vmatrix}=0$$

El determinante una vez factorizado queda:

$$\left(1+\frac{4}{5}\lambda\right)\left[\lambda-\frac{5}{8}\left(-21+5\sqrt{21}\right)\right]\left[\lambda-\frac{5}{8}\left(-21-5\sqrt{21}\right)\right]=0$$

Obtenemos los distintos valores de λ, para que el sistema tenga solución, es decir, los autovalores. Estos son,

$$\lambda_1=\frac{5(-21+5\sqrt{21})}{8} \qquad \lambda_2=\frac{5(-21-5\sqrt{21})}{8} \qquad \lambda_3=-\frac{5}{4}$$

Para hallar las autofunciones asociadas a cada autovalor, la llevaremos al sistema y sustituimos. Entonces,

$$A=-\frac{7}{2}\frac{1}{\lambda}\left(\lambda\frac{2}{5}-1\right)C$$

$$\varphi(x)=-\lambda\frac{7}{2}\frac{1}{\lambda}\frac{2\lambda-5}{5}Cx^3+\lambda xC=\frac{7}{2}\frac{5-2\lambda}{5}x^3+\lambda x$$

Expresión que resulta válida para los autovalorses $\lambda_1 y\ \lambda_2$.

Particularizando para λ_1 y haciendo cálculos, nos queda la autofunción asociada dicho autovalor, ψ_1 ,dada por:

$$\boxed{\Psi_1=x^3+\sqrt{\frac{3}{7}}x}$$

Análogamente se resolvería el problema, para obtener la autofunción Ψ_2, asociada al autovalor λ_2. Esta es:

$$\boxed{\Psi_2 = x^3 - \sqrt{\frac{3}{7}}x}$$

Al hacer la sustitución para el caso del tercer autovalor λ_3, se obtiene:

$$\begin{matrix} A = 0 \\ C = 0 \end{matrix} \Rightarrow \varphi(x) = -2\lambda B x^2$$

Luego obtendremos la autofunción Ψ_3, suprimimos la constante, de modo que tenemos:

$$\boxed{\Psi_3 = x^2}$$

b) Una vez conocido el resultado de la ecuación integral homogénea, hallar el resultado de la que nos propone el ejercicio, es tarea sencilla.

Se nos propone,

$$\varphi(x) = g(x) - \frac{5}{4}x\int_{-1}^{1} dy\, y(x-y)^2\varphi(y),$$

Y podemos darnos cuenta de que es igual a la del apartado anterior, particularizado para el autovalor λ_3, y con $g(x) \neq 0$.

Para resolver el problema, usaremos la ecuación

$$\varphi(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\langle \Psi_n | g \rangle}{\|\Psi_n\|^2} \Psi_n(x)$$

Donde sólo falta por determinar los términos $\langle \Psi_n | g \rangle, \|\Psi_n\|^2$.

Lo haremos para los distintos valores que nos dan de g(x).

- $\boldsymbol{g(x) = x^2}$

$$\langle \Psi_1 / x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} dx \left(x^3 + \sqrt{\frac{3}{7}}x \right) x^2 = 0$$

$$\langle \Psi_2 / x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} dx \left(x^3 - \sqrt{\frac{3}{7}}x \right) x^2 = 0$$

$$\langle \Psi_3 / x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} dx (x^2) x^2 = \frac{2}{5}$$

Como vemos solo tendremos la autofunción Ψ_3. Sin embargo, como $\lambda_3 = \lambda$, tendremos una división por cero. Como no se satisface la excepción del principio de exclusión, no existe solución para este caso.

- $\boldsymbol{g(x) = x}$

Calcularemos los productos escalares y las normas de las funciones, que son los términos que faltan en la expresión.

$$\langle \Psi_1 / x \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + \sqrt{\frac{3}{7}} x \right) x dx = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\langle \Psi_2 / x \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \sqrt{\frac{3}{7}} x \right) x\, dx = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\langle \Psi_3 / x \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2) x\, dx = 0$$

$$\|\Psi_1\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + \sqrt{\frac{3}{7}} x \right)^2 dx = \frac{4}{35}(5 + \sqrt{21})$$

$$\|\Psi_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \sqrt{\frac{3}{7}} x \right)^2 dx = \frac{4}{35}(5 - \sqrt{21})$$

En este caso, al igual que en el anterior, $\lambda_3 = \lambda$, con la salvedad de que en el numerador también tenemos un 0. Es decir tenemos una indeterminación 0 dividido entre 0. El teorema de la alternativa de Fredholm nos dice en este caso qué como el núcleo es igual al núcleo transpuesto, y el producto escalar es nulo, entonces existe solución, pero no única.

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(x) = x + \sum_{n=1}^{2} \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \frac{\langle \Psi_n / g(x) \rangle}{\|\Psi_n\|^2} \Psi_n(x) + B\Psi_3(x)}}$$