1. Resuelve las ecuaciones integrales siguientes:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^x + \lambda \int_0^1 dy\, 2\, \mathrm{e}^{x+y}\, \varphi(y),\\
&\text{(b)} \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} - 2 \int_0^1 dy\, x\, \mathrm{e}^y\, \varphi(y),\\
&\text{(c)} \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^x + \lambda \int_0^1 dy\, x\, y\, \varphi(y).
\end{aligned}$$

2. Halla los valores propios y las funciones propias de las ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^\pi dy\, \mathrm{sen}(x-y)\, \varphi(y),\\
&\text{(b)} \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^\pi dy\, \left(\cos^2 x \cos 2y + \cos 3x \cos^3 y\right)\, \varphi(y).
\end{aligned}$$

3. Resuelve el problema de autovalores de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 dy\, k(x,y)\, \varphi(y)$$

con $k(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}$, $g(x) = 0$. Resuelve la ecuación integral cuando $g(x) = \mathrm{e}^x$.

4. ★

   a) Encuentra los autovalores y las autofunciones de la ecuación integral:

$$\varphi(x) = \lambda\, x \int_{-1}^1 dy\, y\, (x-y)^2\, \varphi(y)\ .$$

   b) Dada la siguiente ecuación integral no homogénea:

$$\varphi(x) = g(x) - \frac{5}{4}\, x \int_{-1}^1 dy\, y\, (x-y)^2\, \varphi(y)\ ,$$

   halla su solución utilizando el apartado anterior, o explica su ausencia, si (i) $g(x) = x^2$ y (ii) $g(x) = x$.

5. Resuelve la ecuación integral

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 dy\, (x+y)\, y\, \varphi(y)$$

obteniendo los términos hasta orden λ^2 mediante los métodos de (a) Neumann y (b) Fredholm. Finalmente, resuelve la ecuación integral de forma exacta.

6. Halla, mediante los determinantes de Fredholm, el núcleo resolvente de $k(x,y) = x\, \mathrm{e}^y$ en el intervalo $0 \le x \le 1$.

7. Sea la ecuación integral de Fredholm

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 dy k(x,y)\, \varphi(y)$$

con núcleo

$$k(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & 0 \le y \le x \le 1 \\ x(1-y) & 0 \le x \le y \le 1\,. \end{cases}$$

a) Halla los autovalores y las autofunciones del problema homogéneo correspondiente.

b) Determina la solución del problema inhomogéneo si $\lambda = 1$ y $g(x) = x$.

8. Resuelve la ecuación integral

$$\varphi(x) = \cos 3x + \lambda \int_0^\pi dy \cos(x+y)\,\varphi(y)$$

para todos los posibles valores de λ. Interpreta los resultados mediante el teorema de la alternativa de Fredholm.

9. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones integrales:

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{x^2} + \int_0^x dy\ \mathrm{e}^{x^2-y^2}\,\varphi(y),$$

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x) = \operatorname{sen} x + 2\int_0^x dy\ \cos(x-y)\,\varphi(y).$$

10. Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_{-1}^1 x(x-y)\,\varphi(y)dy$$

11. ★ Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 \operatorname{sen}(\ln x)\,\varphi(y)dy$$

cuando (a) $g(x) = 0$, (b) $g(x) = 2x$ y (c) $g(x) = x - 1/2$. Explica los resultados teniendo en cuenta el teorema de la alternativa de Fredholm. **Nota:** $\int_0^1 \operatorname{sen}(\ln x)dx = -1/2$.

12. ★ Resuelve la ecuación integral

$$\varphi(x) = 1 - \lambda \int_0^\pi k(x,y)\,\varphi(y)dy$$

donde

$$k(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\cos(y) & x \le y \\ \operatorname{sen}(y)\cos(x) & y \le x. \end{cases}$$

13. ★ Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} dy\,\varphi(y)\sum_{n=1}^\infty \cos(nx)\cos(ny)$$

cuando (a) $g(x) = 0$ y (b) $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

14. ★ Resuelve la ecuación integral

$$\varphi(x) = x - \lambda \int_0^x \operatorname{senh}(x-y)\,\varphi(y)dy.$$

15. ★

a) Halla los autovalores y autofunciones de la ecuación integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + xy)\,xy\,\varphi(y)dy$$

b) Halla todas las posibles soluciones de la ecuación integral

$$\varphi(x) = x^3 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + xy)\,xy\,\varphi(y)dy$$