MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA (07-08): Ejercicio 10, tema 6

Mónica Capilla Alba
Jesús Manuel Gómez Romero
José Antonio Paredes Moreno

Ejercicio 10 Halla todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$f(x) = x + \lambda \int_{-1}^{1} x(x-y)f(y)dy \tag{1}$$

Nos encontramos ante una ecuación de Fredholm de segunda especie e inhomogénea, cuyo núcleo K y término inhomogéneo g son:

$$\begin{aligned} &K(x,y) = x(x-y) = x^2 - xy \\ &g(x) = x \end{aligned} \tag{2}$$

Comencemos. Como el núcleo es separable, podemos escribir la función f de la forma siguiente:

$$f(x) = x + \lambda x^2 \int_{-1}^{1} f(y)dy - \lambda x \int_{-1}^{1} yf(y)dy \tag{3}$$

Y, si llamamos c_1 y c_2 a las integrales[1]:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} f(y)dy \tag{4}$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} yf(y)dy \tag{5}$$

tenemos que:

$$f(x) = x + \lambda x^2 c_1 - \lambda x c_2 \tag{6}$$

Aplicando esta expresión a (4) y (5):

$$c_1 = \int_{-1}^{1} f(y)dy = \int_{-1}^{1} (y + \lambda y^2 c_1 - \lambda y c_2)dy = \lambda \frac{2}{3} c_1$$
$$c_2 = \int_{-1}^{1} yf(y)dy = \int_{-1}^{1} y(y + \lambda y^2 c_1 - \lambda y c_2)dy = \frac{2}{3} - \lambda \frac{2}{3} c_2$$

Habiendo resuelto debidamente las integrales, hemos obtenido el sistema siguiente:

$$\begin{cases} c_1 = \lambda \frac{2}{3} c_1 \\ c_2 = \frac{2}{3} - \lambda \frac{2}{3} c_2 \end{cases} \tag{7}$$

[1] Puesto que son constantes

El determinante con el que podemos calcular las soluciones en función del parámetro λ es[2]:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{2\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = 1 - \frac{2}{3}\lambda^2 = 0$$

Despejando, tenemos dos posibles casos: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$. Por lo tanto, hay dos autofunciones (cada una asociada a un autovalor), que son:

$$\begin{cases} si\ \lambda = \lambda_1 & \psi_1(x) = x^2 \\ si\ \lambda = \lambda_2 & \psi_2(x) = x \end{cases}$$

Como autofunciones que difieren en una constante son la misma autofunción, no aparece dicho término.

Ahora vamos a estudiar las posibles soluciones:

- Si $\lambda \neq \pm\frac{3}{2}$, el sistema hallado para las constantes se cumple si y sólo si $c_1 = 0$ y $c_2 = \frac{2}{(1+\frac{2}{3}\lambda)3}$. Entonces, la solución es:
$$f(x) = x - \lambda x \left[\frac{2}{3 + 2\lambda}\right] = \frac{3x}{3 + 2\lambda} \tag{8}$$
- Si $\lambda = \frac{3}{2}$, volvemos a estudiar el sistema de ecuaciones, y vemos que se verifica para todo c_1 y para $c_2 = \frac{1}{3}$. Así pues, para este caso:
$$f(x) = x + \frac{3}{2}x^2 c_1 - \frac{3}{2}x\frac{1}{3} = \frac{x}{2} - Cx_2 \tag{9}$$
donde hemos redefinido la constante como:$C = -c_1\frac{3}{2}$
- Y si $\lambda = -\frac{3}{2}$, no existe solución, puesto que la segunda ecuación del sistema es imposible de satisfacer.

[2]Nos interesa saber cuándo el determinante de los coeficientes es distinto de cero, y, para ello, estudiamos cuándo se anula.