Belén Caro Marroyo

Amalia Toboso Castañera

Miguel García Diéguez

EJERCICIO HOJA 5 GRUPO 1

5. Resuelve la ecuación integral

$$\boldsymbol{f(x) = x + \lambda \int_0^1 dy(x+y)yf(y)}$$

Obteniendo los términos hasta orden λ^2 mediante los métodos de (a) Neumann y (b) Fredholm. Finalmente, resuelve la ecuación integral de forma exacta.

a) <u>Neumann</u>

Con este método se comienza suponiendo que la solución inicial aproximada es g(x), es decir,

$$y_0 = g(x) = x$$

Ahora bien, para mejorar esta aproximación calculamos y_1 a partir de la siguiente expresión:

$y_1 = g(x) + \lambda \int_0^1 dy\,(x+y)y\,y_0(y)$, que sustituyendo quedaría así:

$$y_1 = x + \lambda \int_0^1 dy(x+y)y * y = x + \lambda\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

De la misma forma, se calculará y_2 , salvo que ahora se sustituye en la integral la segunda aproximación (y_1).

$$y_2 = x + \lambda \int_0^1 dy(x+y)y\left[y + \lambda\left(\frac{y}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= x + \lambda \int_0^1 dy(xy^2 + y^3) + \lambda\left[\frac{1}{3}(xy^2 + y^3) + \frac{1}{4}(xy + y^2\right] =$$

$$= x + \lambda\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) + \lambda^2\left(\frac{x}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{4}\right) + \lambda^2\left(x\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{3}\right)$$

Reorganizando los términos quedaría:

$$\boldsymbol{y(x) = y_2(x) + \mathrm{o}(\lambda^3) = x + \lambda\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) + \lambda^2\frac{(17x + 12)}{72} + \mathrm{o}(\lambda^3)}$$

Donde $\mathbf{o}\left(\boldsymbol{\lambda}^3\right)$ hace referencia a los términos de orden superior que despreciamos.

Ya que el problema pide que se obtengan los términos hasta orden λ^2 ésta será la solución, pero si se quisiese obtener una mejor aproximación no tendríamos más que repetir el proceso.

b) <u>Fredholm</u>

Este método se basa en reemplazar la solución de la ecuación integral $f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y) f(y)$

Por la solución en términos de la serie de Fredholm

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy R(x,y,\lambda) g(y)$$

Donde $R(x,y,\lambda) = \frac{D(x,y,\lambda)}{D(\lambda)}$ es el *núcleo resolvente de Fredholm*.

Con:

$$D(x,y,\lambda) = k(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,y)\, \lambda^n$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n$$

En nuestro caso la solución será de la forma:

$$f(x) = x + \lambda \int_0^1 dy R(x,y,\lambda) y$$

- Calculemos primero D(λ):

Como debemos quedarnos con los términos de λ^2, entonces tenemos:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 dz_1 k(z_1,z_1) + \frac{\lambda^2}{2!} \int_0^1 \int_0^1 dz_1 dz_2 \begin{vmatrix} k(z_1,z_2) & k(z_1,z_2) \\ k(z_2,z_1) & k(z_2,z_2) \end{vmatrix}$$

Resolvemos el determinante de orden 2 de $D(\lambda)$ en nuestro caso:

$$z_1 z_2 \begin{vmatrix} 2z_1 & (z_2 + z_1) \\ (z_2 + z_1) & 2z_2 \end{vmatrix} = z_1 z_2 [-(z_1 - z_2)^2]$$

Resolvemos la 1ª integral:

$$1 - \lambda \int_0^1 dz_1 k(z_1,z_1) = 1 - \lambda \int_0^1 dz_1\, 2{z_1}^2 = 1 - \frac{2}{3}\lambda$$

Llegamos así a que:

$$D(\lambda) = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 \int_0^1 dz_1 dz_2 z_1 z_2 (z_1 - z_2)^2$$

Resolviendo la 2ª integral:

$$\frac{-\lambda^2}{2}\int_0^1 \int_0^1 dz_1 dz_2 z_1 z_2 (z_1 - z_2)^2 = -\frac{\lambda^2}{72}$$

Con lo que: $D(\lambda) = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{\lambda^2}{72}$

- Estudiamos ahora $D(x, y, \lambda)$:

  Como debemos quedarnos con los términos de λ^2, entonces tenemos:

$$D(x, y; \lambda) = k(x, y) - \lambda \int_a^b dz_1 \begin{vmatrix} k(x, y) & k(x, z_1) \\ k(z_1, y) & k(z_1, z_1) \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b \int_a^b dz_1 dz_2 \begin{vmatrix} k(x, y) & k(x, z_1) & k(x, z_2) \\ k(z_1, y) & k(z_1, z_1) & k(z_1, z_2) \\ k(z_2, y) & k(z_2, z_1) & k(z_2, z_2) \end{vmatrix}$$

El resultado del determinante de orden 2 para nuestro caso es:

$$xyz_1^2 + y^2 z_1^2 - z_1^3 y - xy^2 z_1$$

Tras hacer los cálculos, se llega a que el determinante de orden 3 es 0:

$$yz_1 z_2 \begin{vmatrix} x + y & x + z_1 & x + z_2 \\ z_1 + y & z_1 + z_1 & z_1 + z_2 \\ z_2 + y & z_2 + z_1 & z_2 + z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión de D(x,y; λ) y realizando el cálculo de la integral obtenemos que:

$$D(x,y,\lambda) = (x+y)y - \frac{\lambda y}{12}(4x+4y-3-6xy)$$

- Podemos determinar que el valor del núcleo resolvente es:

$$R(x,y,\lambda) = \frac{(x+y)y - \frac{\lambda y}{12}(4x+4y-3-6xy)}{1-\frac{2}{3}\lambda-\frac{\lambda^2}{72}}$$

Si sustituimos esta expresión en la solución en términos de la serie de Fredholm $f(x) = x + \lambda\int_0^1 dyy\ R(x,y,\lambda)$, tenemos que:

$$f(x) = x + \frac{\lambda}{1-\frac{2}{3}\lambda-\frac{\lambda^2}{72}}\int_0^1 dy\, y^2(x+y) - \\ -\frac{1}{12}\frac{\lambda^2}{\left(1-\frac{2}{3}\lambda-\frac{\lambda^2}{72}\right)}\int_0^1 dy\, y^2(4x+4y-3-6xy)$$

El resultado de la primera integral es:

$$x\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

Y el de la segunda integral:

$$\frac{-2x}{12}$$

Con lo que $f(x) = x + \frac{\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{2}{3}\lambda-\frac{\lambda^2}{72}} + \frac{\lambda^2 x}{\left(1-\frac{2}{3}\lambda-\frac{\lambda^2}{72}\right)72}$

Desarrollando llegamos a que la solución es:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{(-24\lambda + 72)x + 18\lambda}{-\lambda^2 - 48\lambda + 72}}$$

c) Resolución de forma exacta

Como nuestro núcleo (x+y)y es un núcleo separable, podemos escribir la solución de la siguiente manera:

$$f(x) = x + \lambda \int_0^1 dy\, yxf(y) + \lambda \int_0^1 dy\, y^2 f(y)$$

$$f(x) = x + \lambda x C_1 + \lambda C_2$$

$$C_1 = \int_0^1 dy y f(y)$$

$$C_2 = \int_0^1 dy y^2 f(y)$$

Escribimos:

$$C_1 = \int_0^1 dy y[y + \lambda C_1 + \lambda C_2] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda C_1 + \frac{1}{2}\lambda C_2$$

$$C_2 = \int_0^1 dy y^2[y + \lambda C_1 + \lambda C_2] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda C_1 + \frac{1}{3}\lambda C_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a que:

$$C_1 = \frac{\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{72}}{1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{\lambda^2}{72}} = \frac{24 + \lambda}{72\left(1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{\lambda^2}{72}\right)} = \frac{24 + \lambda}{-\lambda^2 - 48\lambda + 72}$$

$$C_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{\lambda^2}{72}} = \frac{18}{-\lambda^2 - 48\lambda + 72}$$

Así:

$$f(x) = x + \lambda \frac{(24+\lambda)x}{-\lambda^2 - 48\lambda + 72} + \lambda \frac{18}{-\lambda^2 - 48\lambda + 72} =$$
$$= \boldsymbol{\frac{(-24\lambda + 72)x + 18\lambda}{-\lambda^2 - 48\lambda + 72} = f(x)}$$

Podemos realizar un <u>análisis comparativo</u> de las soluciones obtenidas de manera aproximada y de manera exacta observando que:

- En el caso de la solución aproximada obtenida mediante el método de las *series de Fredholm*, vemos que coincide con la solución exacta aproximando hasta los términos de λ de orden 2. Esto quiere decir que si consideráramos términos de orden superior no mejoraría la aproximación, sino que se distorsionaría.
- En el caso de la solución obtenida mediante las *series Neumann*, se observa que está expresada en potencias de λ. Para comparar esta solución con la solución exacta, tenemos que desarrollar esta última en potencias de λ y comparar término a término las dos soluciones:

$$f(x) = \frac{-24\lambda + 72 \quad x + 18\lambda}{-\lambda^2 - 48\lambda + 72} = x + \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right)\lambda + \left(\frac{17x + 12}{72}\right)\lambda^2 + \ldots$$

Si comparamos con lo que obteníamos en el caso de Neumann

$$f(x) = f_2(x) + o(\lambda^3) = x + \lambda\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) + \lambda^2 \frac{(17x + 12)}{72} + o(\lambda^3)$$

Vemos que, al menos, para los términos de λ de orden 2 la solución aproximada coincide con la solución exacta. Si siguiésemos obteniendo términos para la solución de Neumann llegará un momento en el cual no coincidan con los términos del desarrollo de la solución exacta.