JUAN FERNANDO BRAVO PAREDES

PEDRO JOSÉ MUÑOZ REYES

ÁNGEL HIERRO GARDETA

HOJA 5 – Problema 7

Sea la ecuación integral de Fredholm:

$$\boldsymbol{f(x) - \lambda \int_0^1 dy\, k(x,y) f(y) = g(x)}$$

con núcleo: $$\boldsymbol{k(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & 0 \le y \le x \le 1 \\ x(1-y) & 0 \le x \le y \le 1 \end{cases}}$$

a) Halla los autovalores y las autofunciones del problema homogéneo correspondiente.

b) Determina la solución del problema inhomogéneo si *λ = 1* y *g(x) = x*

a) Halla los autovalores y las autofunciones del problema homogéneo correspondiente:

El núcleo es simétrico, así que las autofunciones que encontremos en un intervalo serán las mismas que en el otro:

k(x,y) = k(y,x)

Resolvemos la ecuación homogénea:

$$f(x) = \lambda \int_0^1 dy\, k(x,y)\ f(y) = \lambda \left\{ \int_0^x dy\ (1-x)y\ f(y) + \int_x^1 dy\ (1-y)x\, f(y) \right\} \Rightarrow$$

$$f(x) = \lambda\,(1-x) \int_0^x dy\, y\, f(y) + \lambda\, x \int_x^1 dy\ (1-y) f(y)$$

Es una ecuación de Volterra, hay que derivar aplicando la *regla de Leibniz*:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} F(x,y)dy = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} F(x,y)dy + F(x,b(x)) \frac{db(x)}{dx} - F(x,a(x)) \frac{da(x)}{dx}$$

Derivamos nuestra ecuación:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lambda \left\{ - \int_0^x dy\, y\, f(y) + (1-x)(1.x) f(x) \right\} + \lambda \left\{ \int_0^1 (1-y) f(y) dy\ + x(-1)(1-x) f(x) \right\}$$

$$= \lambda \left\{ \int_x^1 (1-y)\, f(y) dy - \int_0^x dy\, y\, f(y) \right\} = \lambda \left\{ \int_x^1 f(y) dy - \int_x^1 y\, f(y) dy - \int_0^x dy\, y\, f(y) \right\}$$

Y como:

$$\int_0^1 y\, f(y)dy = \int_0^x y\, f(y)dy\ + \int_x^1 y\, f(y)dy$$

Tendremos:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lambda\left\{\int_x^1 f(y)dy - \int_0^1 y\, f(y)dy\right\}$$

Derivamos de nuevo:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \lambda(-1)f(x) = -\lambda\, f(x)$$

La ecuación diferencial que obtenemos es entonces de la forma:

$$f''(x) + \lambda\, f(x) = 0$$

Transformamos este problema en un problema de Sturn-Liouville para poderlo resolver, para ello buscamos dos condiciones de contorno:

$$f(x), \qquad x \in (0,1), \qquad c.c.\, de\ Dirichlet\colon \begin{cases} k(x=0,y)=0 \\ k(x=1,y)=0 \end{cases}$$

$$f(x=0) = \lambda\,(1-0)\int_0^0 dy\; y\, f(y) + \lambda\, 0\int_0^1 dy\;(1-y)f(y) = 0 \Rightarrow f(0)=0$$

$$f(x=1) = \lambda\,(1-1)\int_0^1 dy\; y\, f(y) + \lambda.1\int_1^1 dy\;(1-y)f(y) = 0 \Rightarrow f(1)=0$$

La solución de este problema de Sturn-Liouville es:

$Autofunciones$: $\boldsymbol{\psi_n(x) = A_n\, sen(n\pi x)}$

$Autovalores$: $\boldsymbol{\lambda_n = (n\pi)^2}$, $\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \ldots}$

Estas autofunciones y autovalores son los mismos que para la ecuación Integral:

$$f(x) = \lambda\int_0^1 k(x,y)\, f(y)dy$$

Pero hemos de normalizar:

$$\underbrace{\int_0^1 dx\psi_n(x)}_{k(x,y)}\underbrace{\psi_n(x)}_{k(y,x)} = 1 = \int_0^1 dx(\psi_n(x))^2$$ (porque el núcleo es simétrico)

Así pues:

$$\int_0^1 dx{A_n}^2 sen^2(n\pi x) = {A_n}^2\int_0^1\ dx\,\frac{1}{2} - \frac{\cos{(2n\pi x)}}{2} = {A_n}^2\,\frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{A_n = \sqrt{2}}$$

Por lo tanto, las autofunciones y autovalores del problema homogéneo serán:

$$\psi_n(x) = \sqrt{2}\, sen(n\pi x)$$

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

b) Determina la solución del problema inhomogéneo si *λ = 1* y *g(x) = x*

Resolvemos ahora la ecuación no homogénea:

$$f(x) - \lambda \int_0^1 k(x,y)\ f(y)dy = x$$

Utilizamos el *método de desarrollo en serie de autofunciones*. Sabemos que el núcleo resolvente se puede expresar como:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n - \lambda}\ g(y)dy$$

Sustituyendo resulta:

$$f(x) = x + 1 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ sen(n\pi x)\ sen(n\pi y)}{(n\pi)^2 - 1}\ y\ dy = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ sen(n\pi x)}{(n\pi)^2 - 1} \int_0^1 y\ sen(n\pi y)\ dy$$

Resolvemos la integral:

$$\int_0^1 y\ sen(n\pi y)\ dy = \left.\frac{sen(n\pi y) - n\pi y\ cos(n\pi y)}{(n\pi)^2}\right|_0^1 = \frac{sen(n\pi) - n\pi\ cos(n\pi)}{(n\pi)^2} - \frac{sen\ 0 - 0\cos 0}{(n\pi)^2}$$

$$= -\frac{n\pi\cos n\pi}{(n\pi)^2} = -\frac{\cos n\pi}{n\pi} = \frac{-(-1)^n}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior, se obtiene que la solución del problema inhomogéneo (si *λ = 1* y *g(x) = x*) es:

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2 - 1} sen(n\pi x)$$