TEMA 5. Ejercicio 8.

Resuelve la ecuación integral:

$$\boldsymbol{f(x) - \lambda \int_0^{\pi} dy \cdot cos(x+y) \cdot f(y) = cos3x}$$

para todos los valores de λ. Interpreta los resultados mediante el teorema de la alternativa de Fredholm.

$$f(x) - \lambda \int_0^{\pi} dy \cdot cos(x+y) \cdot f(y) = cos3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = cos3x + \lambda \int_0^{\pi} dy \cdot cos(x+y) \cdot f(y)$$

Como g(x) = cos (3x) ≠ 0 si $x \neq \pi/6$ ⇒ Ecuación inhomogénea

Vemos si el núcleo es separable:

$k(x,y) = \cos(x+y) = cosx \cdot cosy - senx \cdot seny = \sum_i X_i(x) \cdot Y_i(y) \Rightarrow$
$\Rightarrow Núcleo\ separable$

$$\Rightarrow f(x) = cos3x + \lambda c_1 cosx + \lambda c_2 senx$$

siendo:

$$c_1 = \int_0^{\pi} dy \cdot cosy \cdot f(y)$$
$$c_2 = \int_0^{\pi} dy \cdot seny \cdot f(y)$$

Calculamos el valor de λ en c_1:

$$c_1 = \int_0^{\pi} dy \cdot cosy \cdot f(y) = \int_0^{\pi} dy \cdot cosy \cdot (cos3y + \lambda c_1 cosy - \lambda c_2 seny) =$$
$$= \int_0^{\pi} dy \cdot (3cos^3 y \cdot seny - cosy \cdot sen^3 y) + \int_0^{\pi} dy \cdot \lambda \cdot c_1 \cdot cos^2 y =$$
$$= \lambda \cdot c_1 \cdot \int_0^{\pi} dy \cdot cos^2 y = \lambda \cdot c_1 \cdot \pi/2 \Rightarrow c_1 - c_1 \lambda \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow c_1 \left(1 - \lambda \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \lambda \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\pi} \text{ ó } c_1 = 0$$

Calculamos el valor de λ en c_2:

$$c_2 = \int_0^{\pi} dy \cdot seny \cdot f(y) = \int_0^{\pi} dy \cdot seny \cdot (cos3y + \lambda c_1 cosy - \lambda c_2 seny) =$$
$$= -\int_0^{\pi} dy \cdot \lambda \cdot c_2 \cdot sen^2 y = -\lambda \cdot c_2 \cdot \pi/2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{\pi} \text{ ó } c_2 = 0$$

I. $\boldsymbol{Si\ \lambda_1 = \frac{2}{\pi}} \Rightarrow c_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 \equiv arbitrario\ ;\ c_2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(x) = cos3x + \frac{2}{\pi} c_1 cosx}$$

II. $\boldsymbol{Si\ \lambda_2 = -\frac{2}{\pi}} \Rightarrow 2 \cdot c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0\ ;\ c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_2 \equiv arbitrario \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(x) = \cos 3x + \frac{2}{\pi} c_2 senx}$$

III. **Si** $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{f(x) = cos3x}$

Por otra parte:

El teorema de la alternativa de Fredholm nos dice que si existe autovalor $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ La ecuación homogénea tiene solución y la inhomogénea también puede tener solución si:

$$\int_0^{\pi} dy \cdot \varphi_i(x) \cdot g(x) = 0$$

f(x) debe satisfacer la ecuación homogénea traspuesta: $f(x) = \lambda \int_0^{\pi} dyk(y,x)f(y)$

Vemos si hay solución posible para la ecuación inhomogénea:

$$k(x,y) = \cos(x+y) = cos(y+x) = k(y,x)$$

Resolviendo la ecuación homogénea para $\lambda_1$llegamos a la solución:

$$f(x) = \lambda_1 c_1 cosx \Rightarrow f_1(x) = cosx$$

f_1 autofunción asociada a λ_1. Mi condición de ortogonalidad es:

$$\int_0^{\pi} dy \cdot cosy \cdot cos3y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$Sí hay solución de la ecuación inhomogénea para $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{f(x) = cos3x + \frac{2}{\pi} \cdot c_1 \cdot cosx}$$

Si repetimos el proceso para $\lambda_2 \Rightarrow f_2(x) = senx$. Mi condición de ortogonalidad es:

$$\int_0^{\pi} dy \cdot seny \cdot cos3y = 0$$

$\Rightarrow$ Sí hay solución de la ecuación inhomogénea para $\lambda = \lambda_2 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{f(x) = cos3x + \frac{2}{\pi} \cdot c_2 \cdot cosx}$$

Ejercicio realizado por:

Víctor M. Piris Carnerero
Alejandro J. Pérez Aparicio
Víctor M. Sánchez Carrasco