CLARA GÓMEZ GARCÍA

Mª JESÚS MACÍAS CASTILLO

NOELIA SOLÍS PRECIADO

JUAN VILLA MORALES

TEMA 6: DESARROLLO ASINTÓTICO DE INTEGRALES

10.- Demuestra que

$$\boldsymbol{\int_0^\infty dt\, e^{-t^2}\, e^{xt} \sim \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}\ ,\ x \to \infty}$$

Tenemos una integral de la forma:

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt, \qquad x \to \infty$$

Si identificamos términos, vemos que:

$$f(t) = \boldsymbol{e^{-t^2}}$$

$$\phi(t) = \boldsymbol{t}$$

$$a = 0, b = \infty$$

Por tanto este problema lo resolvemos por el método generalizado de Laplace. Este método se basa en que aproximamos el valor de nuestra integral a su comportamiento en el máximo del integrando. Ambas funciones, $f(t)\ y\ \phi(t),$ son reales y continuas.

Vemos que

$$f(t) = e^{-t^2}$$

Por tanto, se nos presenta un problema ya que no podemos decir qué exponencial domina en el integrando.

Vamos a hallar la posición del verdadero máximo del integrando

$$I(x) = \int_a^b e^{\phi(x,t)} dt\,, \qquad donde\ \phi(x,t) = xt - t^2$$

$$\frac{d\phi(x,t)}{dt} = 0 = x - 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

La posición del máximo depende de valor de *x*, por tanto, el máximo es *movible o no fijo*.

Para aplicar el método de Laplace lo primero que haremos es transformar este problema en uno con un máximo fijo. Para llevar a cabo esto, hacemos el cambio de variable

$$t = \frac{x}{2}s \Rightarrow dt = \frac{x}{2}ds$$

Vemos que el máximo de $\phi(x,s)$ está situado en $s\ = 1$, haciendo el cambio en el valor del máximo anterior

$$t = \frac{x}{2}s \Rightarrow \frac{x}{2}s = \frac{x}{2} \Rightarrow s = 1 = c$$

Realizando este cambio de variable se tiene que

$$I(x) = \frac{x}{2}\int_0^\infty e^{\phi(x,s)} ds$$

Donde

$$\phi(x,s) = \frac{x^2}{2}(s - \frac{s^2}{2})$$

Vamos a comprobar que, efectivamente, el máximo de $\phi(x,s)$ se encuentra en $s = 1$:

$$\frac{d\phi(x,s)}{ds} = 0 = \frac{x^2}{2}(1 - \frac{2s}{2})\ \Rightarrow s = c = 1$$

$$\left.\frac{d^2\phi(x,s)}{ds^2}\right|_{s=1} = \frac{-x^2}{2} < 0$$

Por tanto, la integral se transforma en

$$I(x) = \frac{x}{2}\int_0^\infty e^{\frac{x^2}{2}(s - \frac{s^2}{2})} ds$$

Desarrollando $\phi(x, s)$ en torno a *s=1*:

$$\phi(x, s) \approx \phi(c) + \phi^{'}(c)(s - c) + \frac{1}{2}\ \phi^{''}(c)(s - c)^2$$

$$\phi(x, s) \approx \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2}\right)(s - 1)^2 = \frac{x^2}{4}(1 - (s - 1)^2)$$

Vamos a aproximar el intervalo de integración en torno al máximo c, que está dentro del intervalo (a, b):

$$I(x) \sim \frac{x}{2}\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{\frac{x^2}{4}(1-(s-1)^2)} ds$$

Hacemos que $\delta \to \infty$, ya que los términos que añadimos son despreciables, son Términos Exponencialmente Pequeños:

$$I(x) \sim \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{4}(1-(s-1)^2)} ds$$

Es decir,

$$I(x) \sim I(x, \delta) \sim I(x, \delta \to \infty)$$

Ya podemos calcular el valor de nuestra integral $I(x)$, cuando $x \to \infty$. Para ello hacemos el cambio de variable:

$$u^2 = \frac{x^2}{4}(s - 1)^2 \Rightarrow u = \frac{x}{2}(s - 1)$$

$$du = \frac{x}{2}\ ds \Rightarrow ds = \frac{2}{s}\ du$$

El cambio de variable también afecta a los límites, por lo que según la relación

$$u = \frac{x}{2}(s - 1): \begin{cases} s = \infty \Rightarrow u = \infty \\ s = -\infty \Rightarrow u = -\infty \end{cases}$$

Obtenemos así:

$$I(x) \sim e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

Donde nos queda únicamente calcular el valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2\ \int_{0}^{\infty} e^{-u^2} du$$

Esta integral está tabulada y su valor es $\sqrt{\pi}$.

También la podemos evaluar realizando el cambio: $u^2 = v$ y teniendo en cuenta la función gamma:

$$\alpha! \equiv \Gamma(1+\alpha) = \int_0^{\infty} dy\, y^{\alpha} e^{-y}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

Llegamos a:

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}}\, dv = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Una vez calculada la integral por una de las 2 formas, tan sólo nos queda sustituir en:

$$I(x) \sim e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

De lo que obtenemos:

$$\boxed{I(x) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t^2} e^{xt} \sim \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}, cuando\ x \to \infty}$$

Que es lo que queríamos demostrar.