Métodos de la Física Matemática

Tema 6 – Desarrollo Asintótico de Integrales

María F. Collado Caballero
Antonio E. Hurtado Romero
Esther Leal Cidoncha
Isabel Mª Martín Ríos

Hoja 6 - Problema 11º

Demuestra que:

$$\int_x^\infty \frac{e^{i(t-x)}}{t}dt = \frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \qquad \text{para} \quad x \to \infty$$

Para hallar los primeros términos del desarrollo procederemos a integrar por partes ya que, en principio, la integral no tiene una resolución más directa. Para ello primero multiplicamos y dividimos por la derivada del exponente:

$$\frac{1}{i}\int_x^\infty \frac{i \cdot e^{i(t-x)}}{t}dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dv = ie^{i(t-x)}dt & \to v = e^{i(t-x)} \\ u = 1/t & \to du = -dt/t^2 \end{cases}$$

Resolvemos:

$$\frac{1}{i}\int_x^\infty \frac{i \cdot e^{i(t-x)}}{t}dt = \underbrace{\frac{1}{i}\frac{e^{i(t-x)}}{t}\Bigg|_x^\infty}_{(A)} + \underbrace{\frac{1}{i}\int_x^\infty \frac{e^{i(t-x)}}{t^2}dt}_{(B)} \tag{1}$$

(A) Calculamos el término de contorno:

$$\frac{1}{i}\frac{e^{i(t-x)}}{t}\Bigg|_x^\infty = \frac{1}{i}\cancel{\frac{e^{i(\infty-x)}}{\infty}}^{*} - \frac{1}{i}\frac{e^{i(x-x)}}{x} = \frac{i}{x}$$

$\leftarrow$ hemos obtenido el primer término del desarrollo que se nos pide demostrar.

*La función $e^{i(t-x)}$ es una función acotada: $\left|e^{i(t-x)}\right| \le 1$

(B) Resolvemos ahora la integral remanente procediendo del mismo modo que con la integral principal, por partes:

$$\frac{1}{i}\int_x^\infty \frac{i \cdot e^{i(t-x)}}{t^2}dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dv = ie^{i(t-x)}dt & \to v = e^{i(t-x)} \\ u = 1/t^2 & \to du = -2dt/t^3 \end{cases}$$

Vamos a multiplicar por el término $\frac{1}{i}$ que le precede en la relación (1):

$$\frac{1}{i^2}\int_x^\infty \frac{i\cdot e^{i(t-x)}}{t^2}dt = \underbrace{\frac{1}{i^2}\left.\frac{e^{i(t-x)}}{t^2}\right|_x^\infty}_{(C)} + \underbrace{\frac{1}{i^2}\int_x^\infty \frac{e^{i(t-x)}}{t^3}dt}_{(D)}$$

Procedemos de igual forma que en el caso anterior, calculamos el término (C):

$$-\left.\frac{e^{i(t-x)}}{t^2}\right|_x^\infty = -\cancel{\frac{e^{i(\infty-x)}}{\infty}} + \frac{e^{i(x-x)}}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$\leftarrow$ hemos obtenido el segundo término del desarrollo asintótico.

Podríamos calcular ahora la integral (D) y dejar demostrada la igualdad que nos pedían pero, a la vista de los resultados, nos ha parecido más interesante encontrar una relación de recurrencia que nos lleve a hallar el término general del desarrollo asintótico.

Tenemos que:

$$I_1 = \int_x^\infty \frac{e^{i(t-x)}}{t}dt = \frac{1}{i}\left.\frac{e^{i(t-x)}}{t}\right|_x^\infty + \frac{1}{i}I_2$$

Se puede comprobar que, para calcular las sucesivas $I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n$:

$$I_n = \int_x^\infty \frac{e^{i(t-x)}}{t^n}dt = \underbrace{\frac{1}{i}\cancel{\frac{e^{i(\infty-x)}}{\infty}}}_{\text{Acotada}} - \frac{1}{i}\frac{e^{i(x-x)}}{x^n} + \underbrace{\frac{n}{i}\int_x^\infty \frac{e^{i(t-x)}}{t^{n+1}}dt}_{I_{n+1}}$$

Nos queda, como fórmula de recurrencia:

$$I_n = \frac{i}{x^n} + \frac{n}{i}I_{n+1}$$

Si la aplicamos a las tres primeras integrales:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{i}{x} + \frac{1}{i}I_2 \\ I_2 &= \frac{i}{x^2} + \frac{2}{i}I_3 \\ I_3 &= \frac{i}{x^3} + \frac{3}{i}I_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad I_1 = \frac{i}{x} + \frac{1}{i}\left[\frac{i}{x^2} + \frac{2}{i}\left(\frac{i}{x^3} + \frac{3}{i}I_4\right)\right]$$

$$\boxed{I_1 = \frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} \underbrace{- \frac{2i}{x^3} + 6iI_4}_{O\left(\frac{1}{x^3}\right)}}$$

Con lo anterior queda demostrado lo que se nos pedía. Ahora calculemos I_4 para ver si podemos deducir el término general del desarrollo:

$$I_4 = \frac{i}{x^4} + \frac{4}{i} I_5 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2i}{x^3} + 6i\left(\frac{i}{x^4} + \frac{4}{i} I_5\right) = \frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2i}{x^3} - \frac{6}{x^4} + 24 I_5$$

El desarrollo debe ser:

$$\boxed{I_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{i^{n+2}}{x^n} (n-1)!} \qquad \text{para} \quad x \to \infty$$