- **Halla, para $x \to \infty$, el desarrollo asintótico completo de:**

$$\int_1^2 t^{1/2} e^{-xt} dt$$

Apliquemos en primer lugar el siguiente cambio de variable:

$$s = t - 1$$

$$ds = dt$$

Obtenemos la siguiente integral:

$$\int_0^1 (s+1)^{1/2} e^{-x(s+1)} ds = e^{-x} \int_0^1 (s+1)^{1/2} e^{-xs} ds$$

Como vemos se corresponde a una integral de Laplace, aplicaremos el lema de Watson. Pero primero tenemos que desarrollar el integrando mediante la fórmula del binomio generalizado de Newton:

$$(s+1)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(n - \frac{1}{2} - 1\right)!}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)!\, n!} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n - \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi} n!} s^n$$

Introduciéndolo en la integral:

$$e^{-x} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n - \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi} n!} s^n \right) e^{-xs} ds =$$

Permutamos el orden del sumatorio y la integral obteniendo:

$$= e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n - \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi} n!} \int_0^1 s^n e^{-xs} s^n ds =$$

Las integral tienen solución inmediata mediante el cambio $xs = \tau$ y teniendo en cuenta que $x \to \infty$:

$$\int_0^1 e^{-xs} s^n ds = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x e^{-\tau} \tau^n ds = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n ds = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \frac{\text{n!}}{x^{n+1}}$$

Introduciendo estos resultados en la expresión, llegamos a:

$$= e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}n!} \frac{\mathrm{n!}}{x^{n+1}} =$$

Luego el desarrollo asintótico es:

$$\int_1^2 t^{1/2} e^{-xt}\, dt = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\Gamma(n-\frac{1}{2})\, x^{-(n+1)} \quad para\ x \to \infty$$