Problema 6 de la quinta hoja de ejercicios

Grupo nº 5

Antonio Castaño Tierno
Víctor Pablo Galván Chacón
Ramón Julián Parejo Cuellar
Jesús Miguel Simón Martín

Métodos de la física matemática
Física, Universidad de Extremadura
Curso 2008-2009

a)Se nos pide hallar el término dominante para $x \to \infty$ de:

$$\int_0^1 sen(t) \cdot e^{-x senh^4(t)}\, dt$$

Vemos que la integral tiene la forma de la integral generalizada de Laplace

($I(x) = \int_a^b f(t) \cdot e^{x\phi(t)}\, dt$)

Vemos que $\begin{cases} \phi(t) = -senh^4(t) \\ \phi'(t) = -\cosh(t) \cdot senh^3(t) \\ f(t) = sen(t) \end{cases}$

El máximo de la función $\phi(t)$ está en $t = 0$, que es donde $\phi'(t)$ se anula. En principio, podríamos aplicar el método de Laplace para hallar el término dominante. Sin embargo, nos encontramos con un problema: $f(0) = sen(0) = 0$

Una de las condiciones del método de Laplace es que $f(0) \neq 0$, y nuestra función no la cumple. Por tanto, debemos sortear este escollo antes de aplicar el método, o aplicar otro procedimiento.

Vamos a aproximar $f(t)$ por su desarrollo en serie de Taylor en el primer término en que la derivada no sea 0, es decir, en el primero, t.

$f(t) = sen(t) \sim t(t-c)^{\lambda}$, siendo c el máximo (con c=a=0 en nuestro caso).

Tras esta consideración, podemos aplicar el método de Laplace, considerando, en vez del intervalo completo [0,1], el entorno del máximo:

$$I(x,\delta) = \int_0^{0+\delta} f(t) \cdot e^{x\phi(t)}\, dt \approx \int_0^{0+\delta} t \cdot e^{x\left[\frac{1}{4!}\phi^{IV}(t)(t-0)^4\right]}\, dt$$

$\square$

Desarrollamos $\phi(t)$ hasta llegar a la derivada de cuarto orden, ya que es la primera que no se hace cero en el máximo.

Hacemos $\delta \to \infty$

$$I(x,\delta) \approx \int_0^{\infty} t \cdot e^{x\frac{1}{4!}\phi^{IV}(0)t^4}\, dt$$

$\square$

$$\phi^{IV}(t) = -24\cosh^4(t)$$

$$\phi^{IV}(0) = -24\cosh^4(0) = -24$$

Operando:

$$I(x,\delta) \approx \int_0^{\infty} t \cdot e^{-xt^4}\, dt$$

$\square$

Hacemos el cambio $xt^4 = s$

Obtenemos la integral en s:

$$I(s) = \int_0^\infty \left(\frac{s}{x}\right)^{1/4} e^{-s} \frac{1}{4} s^{-3/4} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/4} ds = \frac{1}{4} x^{-1/2} \int_0^\infty s^{-1/2} e^{-s} ds$$

Identificando con la función Γ:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Vemos que nuestra integral es:

$$I(x) \square \frac{1}{4} x^{-1/2} \square \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

$\square$

b) Ahora buscamos el término dominante de la siguiente integral:

$$\int_1^2 e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} \ln(1+t)\, dt$$

Vemos que la integral tiene la forma de la integral generalizada de Laplace:

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt$$

Identificamos términos:

$f(t) = \ln(1+t)$

$\phi(t) = -\left(t + \frac{1}{t}\right)$

$\phi'(t) = -1 + \frac{1}{t^2}$

$a = 1$

$b = 2$

Resolveremos este problema haciendo mediante el modo directo de desarrollo asintótico de integrales de Laplace.

Observamos que $\phi(t)$ tiene un máximo absoluto en t=a=1, por lo tanto podemos aproximar $I(x)$ de la siguiente forma:

$$I(x) \sim I(x,\delta) = \int_a^{a+\delta} \ln(1+t) e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt$$

Reemplazamos $\phi(t)$ por su desarrollo en serie de Taylor en torno al máximo:

$$\phi(t) \approx \phi(a) + \frac{1}{2}\phi''(t)(t-a)^2 = -2 - (t-1)^2$$

$f(t)$ lo aproximamos por el primer término del desarrollo en torno a t=a:

$f(t) \approx f(a) = \ln 2$

Sustituimos nuestro desarrollo de $\phi(t)$ en la integral y evaluamos el término dominante ampliando el intervalo a infinito:

$$I(x,\delta) \sim \int_{1}^{1+\delta} \ln 2 \, e^{x\left(-2-(t-1)^2\right)} dt$$

Si $\delta \to \infty$:

$$I(x) \sim \ln 2 \, e^{-2x} \int_{1}^{\infty} e^{-(t-1)^2} \, dt$$

Hacemos el cambio $s = t - 1$ y nos queda:

$$I(x) \sim \ln 2 e^{-2x} \int_{0}^{\infty} e^{-s^2} ds$$

Identificamos de nuevo con la función gamma y obtenemos el valor de I(x):

$$I(x) \sim \frac{\ln 2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \, e^{-2x} \qquad x \to \infty$$