EJERCICIO 8. TEMA 6

Juan Jesús Fraire González
Federico Gerona Plá
Ana Belén Fernández Fernández

Demuestra la fórmula de Stirling, esto es, demuestra que es el término asintótico principal de la función gamma para $x \longrightarrow \infty$ viene dado por

$$\boldsymbol{\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt \sim x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}}$$

Partimos de la ecuación

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt$$

En este ejercicio la función f(t) va a cero cuando t→ c más rápidamente que cualquier potencia de t-c. Y por tanto es imposible poder aproximar como hemos realizado en otros casos mediante el desarrollo asintótico del término dominante en potencias de t-c.

En nuestro caso para resolver la integral vamos a hallar la posición del verdadero máximo del integrando:

$$I(x) = \int_0^\infty f(t) e^{\emptyset(x,t)}\, dt$$

A nuestra integral vamos a realizarla transformaciones las cuales nos facilitarán los cálculos:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} e^{x \ln t} dt$$

Vemos que f(t)= $\frac{1}{t}$ y que $\emptyset(x,t) = -t + xlnt$. Hemos pues de buscar el máximo del argumento de la exponencial, es decir, el máximo de $\emptyset(x,t)$. No voy a tener en cuenta el t^{-1} porque no es relevante. En el máximo se tiene que cumplir que $\frac{d}{dt}\emptyset(x,t) = 0$

Entonces nos quedaría:

$$\left(\frac{x}{t} - 1\right) = 0$$

Despejando t obtenemos que t=x , por lo tanto se dice que el máximo es movible o no fijo.

Para que podamos aplicar el método de Laplace vamos a realizar el siguiente cambio de variable t= sx lo que nos quedaría:

$$\Gamma(x) = x^{x-1} \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-x(s-lns)}\, ds$$

En términos de la variable s se tiene que la integral anterior tiene la forma de una integral de Laplace de máximo fijo en s=1 con f(s)=1/s y ϕ(s)= -(s- lns). Comprobemos que el máximo se da en s=1: Φ'(s)= -1+(1/s)=0 y Φ''(s)=-1 en s=1, lo cual implica que efectivamente s=1 es el máximo de ϕ(s). Ya podemos resolver la integral mediante el método de desarrollo asintótico de integrales generalizadas de Laplace.

Si miramos la teoría podemos observar que nuestra integral pertenece al modo III-2 y que se resuelve mediante:

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}\ f(c) e^{x\emptyset(c)}}{\sqrt{-x\emptyset''(c)}}$$

donde c es el valor en donde se da el máximo del integrando, es decir, el máximo de ϕ(s). En nuestro caso c=1 y por lo tanto nos quedaría finalmente:

$$\Gamma(x) \simeq x^x\, e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \qquad x \longrightarrow \infty$$

pues Φ''(1)= -1. Esta fórmula final es la fórmula de Stirling.