1. [www] Obtén el desarrollo asintótico de la función integral seno

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt ,$$

útil para valores pequeños de $x$. Encuentra también el desarrollo asintótico válido para valores grandes de $x$.

2. Mediante integración por partes, halla la conducta asintótica completa de las integrales

*a*)
$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt , \quad x \to \infty ,$$

*b*)
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\, dt , \quad x \to 0^+ .$$

3. Encuentra el término dominante de
$$\int_x^\infty \exp\left(-at^b\right)\, dt , \quad x \to \infty ,$$
donde $a > 0$ y $b > 0$.

4. *a*) Las integrales de Fresnel son de la forma
$$\int_x^\infty f(t)\, dt ,$$
donde $f(t) = \cos(t^2)$ ó $f(t) = \operatorname{sen}(t^2)$. Halla la conducta asintótica completa para $x \to 0$ y $x \to \infty$.

   *b*) La integral generalizada de Fresnel es
$$F(x, a) = \int_x^\infty t^{-a}\, \mathrm{e}^{it^2}\, dt , \quad a > 0 .$$
Halla el desarrollo asintótico completo de $F(x, a)$ para $x \to \infty$.

5. ★ Halla, para $x \to \infty$, el desarrollo asintótico completo de
$$\int_1^2 t^{1/2} e^{-xt} dt$$

6. ★ Encuentra el término dominante para $x \to \infty$ de:

*a*)
$$\int_0^1 \operatorname{sen} t \exp\left(-x \operatorname{senh}^4 t\right)\, dt ,$$

*b*)
$$\int_1^2 \exp[-x(t + 1/t)] \ln(1 + t) dt$$

7. [www]

*a*) Halla el desarrollo asintótico completo para $x \to \infty$ de
$$\int_0^{\pi/2} \exp\left(-x \tan^2 t\right)\, dt .$$

*b*) Encuentra la conducta principal para $x \to \infty$ de
$$\int_0^{2\pi} \left(1 + t^2\right) \mathrm{e}^{x \cos t}\, dt .$$

8. ★ Demuestra la fórmula de Stirling, esto es, demuestra que es término asintótico principal de la función gamma para $x \to \infty$ viene dado por
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, dt \sim x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

9. Halla la conducta principal para $x \to \infty$ de
$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty \left[t^{x-1}/(x+t)\right]\, \mathrm{e}^{-t^\alpha}\, dt}{\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t^\alpha}\, dt}\,.$$

10. ★ Demuestra que
$$\int_0^\infty dt e^{-t^2} e^{xt} \sim \sqrt{\pi}\, e^{x^2/4}, \quad x \to \infty$$

11. ★ Demuestra que
$$\int_x^\infty \frac{e^{i(t-x)}}{t} = \frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad x \to \infty$$

12. Demuestra que la representación integral de la función de Bessel de orden $n$
$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} t - nt) dt$$
puede escribirse como
$$J_n(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\pi/2} e^{i(x\cos t - n\pi/2)}\cos(nt) dt$$
y, a partir de esta expresión, demuestra que su conducta principal para $x \to \infty$ viene dada por
$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

13. La función de Airy de segunda clase $\mathrm{Bi}(x)$ viene dada por la suma de dos integrales $I_1(x)$ y $I_2(x)$ donde
$$I_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t^3/3+xt}\, dt$$
$$I_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(t^3/3 + xt\right) dt$$
Calcula el comportamiento asintótico principal de estas dos integrales para $x \to \infty$.

14. Halla la conducta principal de las siguientes integrales por el método de la fase estacionaria cuando $x \to \infty$:

*a*) ★
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{ixt^2}\, \cosh t^2\, dt\,,$$

*b*) www
$$\int_0^1 \cos(xt^4)\, \tan t\, dt\,,$$

*c*) www
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{ix(t-\operatorname{sen} t)}\, dt\,,$$

*d*) www
$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left[x(t + t^3/6 - \operatorname{senh} t)\right]\, \cos t\, dt\,,$$

*e*) www
$$\int_{-1}^1 \operatorname{sen}\left[x(t - \operatorname{sen} t)\right]\, \operatorname{senh} t\, dt\,.$$

*f*) ★
$$\int_0^{\pi/4} \cos\left(xt^2\right)\, \tan^2 t\, dt\,.$$