Problema realizado por:

Víctor Manuel Sánchez Carrasco

Alejandro Jesús Pérez Aparicio

Víctor Manuel Piris Carnerero

Problema 6

a) Halla tres términos del desarrollo asintótico para $x \to \infty$ de

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x tan^2 t} dt$$

b) Encuentra la conducta principal para $x \to \infty$ de

$$\int_0^{2\pi} (1+t^2) e^{x cos\, t} dt$$

a)

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x tan^2 t} dt$$

Hacemos un cambio de variable $s = tan^2 t$

$$ds = 2\frac{tan\, t}{cos^2 t} dt$$

$$cos^{-2} t = 1 + tan^2 t \implies ds = 2 tan\, t (1 + tan^2 t) dt$$

$$ds = 2\sqrt{tan^2 t}(1 + tan^2 t) dt = 2\sqrt{s}(1+s) dt \implies dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{s}(1+s)} ds$$

$$dt = \frac{1}{2} s^{-1/2} (1+s)^{-1} ds$$

Los nuevos límites de integración son $\begin{cases} tan\, \frac{\pi}{2} \to \infty \\ tan\, 0 \to 0 \end{cases}$

La integral nos queda de la siguiente forma

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} s^{-1/2}(1+s)^{-1} e^{-xs} ds$$

Donde $f(s) = s^{-1/2}(1+s)^{-1}$

Si desarrollamos $f(s)$ en serie de potencias de s

$$f(s) = s^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{\beta n}$$

$$f(s) = s^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^n$$

Introducimos el desarrollo en serie en la integral

$$I(x) \sim \frac{1}{2} \int_0^{\infty} s^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^n \, e^{-xs} ds$$

Aplicamos el Lema de Watson que es equivalente a intercambiar el orden de la integral y el sumatorio

$$I(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} s^{n-\frac{1}{2}} e^{-xs} ds$$

Empleando el cambio de variable $xs = u \Longrightarrow ds = \frac{1}{x} du$ y teniendo en cuenta la definición de la función gamma tenemos que

$$\int_0^{\infty} s^{n-\frac{1}{2}} e^{-xs} ds = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} \frac{1}{x} du = \frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} du$$

$$\int_0^{\infty} s^{n-\frac{1}{2}} e^{-xs} ds = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{x^{n+\frac{1}{2}}}$$

De modo que los tres términos del desarrollo asintótico son

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{x^5}}$$

b)

$$\int_0^{2\pi} (1 + t^2) e^{x \cos t} dt$$

Debemos saber cuando tenemos un máximo en la exponencial eso ocurre cuando

$$\cos t = 1 \Longrightarrow t = 0, 2\pi$$

Dividimos el intervalo de integración en dos intervalos

$$I(x) \sim \int_0^{\delta} (1+t^2) e^{x\cos t} dt + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} (1+t^2) e^{x\cos t} dt$$

Hacemos un cambio de variable en la segunda integral para desplazar el segundo máximos al origen así los dos máximos coincidirán

$$t = 2\pi - s \Rightarrow dt = -ds$$

Con los límites $\begin{cases} 2\pi = 2\pi - s \Rightarrow s = 0 \\ 2\pi - \delta = 2\pi - s \Rightarrow s = \delta \end{cases}$

Como el coseno es una función par: $cos\,(2\pi - s) = cos\,(-s) = cos\,s$

Sustituimos todo esto en la segunda integral

$$I(x) \sim \int_0^{\delta} (1+t^2) e^{x\cos t} dt - \int_{\delta}^{0} [1+(2\pi - s)^2] e^{x\cos s} ds$$

Como s es una variable muda podemos cambiarla por t

$$I(x) \sim \int_0^{\delta} (1+t^2) e^{x\cos t} dt - \int_{\delta}^{0} [1+(2\pi - t)^2] e^{x\cos t} dt$$

Si invertimos el orden de integración de la segunda integral esta cambiara de signo

$$I(x) \sim \int_0^{\delta} (1+t^2) e^{x\cos t} dt + \int_0^{\delta} [1+(2\pi - t)^2] e^{x\cos t} dt$$

$$I(x) \sim \int_0^{\delta} [2 + t^2 + (2\pi - t)^2] e^{x\cos t} dt$$

$$I(x) \sim \int_0^{\delta} [2 + 4\pi^2 + 2t^2 - 2\pi t] e^{x\cos t} dt$$

Ahora $f(t) = 2 + 4\pi^2 + 2t^2 - 2\pi t$. El término dominante es el que tenga menor potencia de t, como hay un término independiente de t este es el término dominante $2 + 4\pi^2$.
Desarrollamos $cos\,t$ en serie de Taylor

$$cos\,t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \cdots$$

y tomamos los primeros términos $cos\,t = 1 - \frac{t^2}{2}$

$$I(x) \sim (2 + 4\pi^2) e^x \int_0^{\delta} e^{-x\frac{t^2}{2}} dt$$

Hacemos otro cambio de variable $s^2 = x\frac{t^2}{2} \Longrightarrow s = \sqrt{\frac{x}{2}}t \Longrightarrow dt = \sqrt{\frac{2}{x}}ds$

Con los límites $\begin{cases} s = \sqrt{\frac{x}{2}}\delta \\ s = \sqrt{\frac{x}{2}}0 \Longrightarrow s = 0 \end{cases}$

Y sustituimos en la integral

$$I(x) \sim (2 + 4\pi^2)e^x \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}\delta} e^{-s^2} ds$$

Para evaluar la integral extendemos el intervalo de integración a infinito, es decir hacemos $\delta \to \infty$

$$I(x) \sim (2 + 4\pi^2)e^x \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$$

Empleando el cambio de variable $s^2 = u \Longrightarrow ds = \frac{1}{2}u^{-1/2}du$ y teniendo en cuenta la definición de la función gamma tenemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{-1/2}e^{-u}du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Sustituyendo el valor de esta integral en

$$I(x) \sim (2 + 4\pi^2)e^x \sqrt{\frac{2}{x}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Y esta es la conducta principal para $x \to \infty$

$$I(x) \sim (2 + 4\pi^2)e^x \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$