Juan Fernando Bravo Paredes

Ángel Hierro Gardeta

Pedro José Muñoz Reyes

Hoja 6 Ejercicio 8-b)

$$\int_0^1 \cos(xt^4)\, tgt\, dt \quad , x \to \infty$$

Podemos poner que: $e^{ixt^4} = \cos(xt^4) + isen(xt^4)$

Por lo tanto la ecuación puede escribirse como:

$\int_0^1 \cos(xt^4)\, tg(t)\, dt = \mathrm{Re}\int_0^1 e^{ixt^4} tg\ t\ dt$

Vemos que la integral tiene ahora la forma de:

$$I(x) = \int_a^b \mathrm{f(t)e^{i\alpha\psi(t)}}\, dt\, , \alpha \to \infty$$

Reconociendo los elementos de la integral:

f(t)= tg t; $\psi(t) = t^4$

f(t)= tg t , f(0) = 0

Desarrollando por Taylor la función f(t) en f(0)(Mclaurin):

$$\mathrm{f(t)} \cong 0 + 1\frac{1}{1!}(t-0)^1 \cong t$$

sabemos que en este caso tenemos que f= $f_0(t-a)^\lambda$, donde λ es la primera derivada distinta de cero de f(t), por lo tanto vemos que λ=1.

Por otro lado: $\psi(t) = t^4$, derivando sucesivamente:

$\psi'(t) = 4t^3$ $\psi'(0) = 0$; $\psi'''(t) = 4\cdot 3\cdot 2t$ $\psi'''(0) = 0$

$\psi''(t) = 4\cdot 3t^2$ $\psi''(0) = 0$; $\psi^{IV}(t) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ $\psi^{IV}(0) = 4!$

Luego vemos que 4 es el orden de la derivada distinta de cero (n=4), que su valor es 4! y según las notas vemos que dados los resultados anteriores estamos en el caso en el que $\psi^n(0) > 0$ y f(t) es distinto de 0 y finito, por tanto podemos escribir que:

$$\boldsymbol{I(\alpha) \cong \left[\frac{n!}{\alpha\psi^{(n)}(\mathrm{a})}\right]^{\frac{\lambda+1}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{n}\right)}{n} f_0 e^{i\alpha\psi\ (\mathrm{a})-\mathrm{i}(\lambda+1)\frac{\pi}{2n}}}$$

identificando los términos obtenidos vemos que:

$$I(\alpha) \cong \left[\frac{4!}{x24}\right]^{\frac{1+1}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{4}\right)}{4} f_0 e^{i\alpha 0-\mathrm{i}(1+1)\frac{\pi}{2\cdot 4}} \cong I(\alpha) \cong \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{x}}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Con lo que ya tenemos el valor de la integral $\int_0^1 e^{ixt^4} tg\ t\ dt$, pero como queremos saber :

$$\mathrm{Re}\int_0^1 e^{ixt^4} tg\ t\ dt = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

Por otro lado:

$$\mathrm{I(x)}= Re\int_0^{\delta} e^{ixt^4}\ t\ dt \qquad (*)$$

Si hacemos el cambio $xt^4 = s^4$ (1)

$\mathrm{xt}^4 = \mathrm{s}^4$ => $\mathrm{t}^2 = \frac{\mathrm{s}^2}{\sqrt{\mathrm{x}}}$. Si por otra parte derivamos (1): $4xt^3dt = 4s^3ds =$ $> xt^2tdt = s^3ds$ => t dt=$\frac{\sqrt{x}s^3ds}{xs^2} = \frac{sds}{\sqrt{x}}$.

Si t= δ => s=$\sqrt[4]{x\delta^4} = \delta x^{1/4}$

$$(*)= \int_0^{\delta} e^{ixt^4}\ t\ dt = \int_0^{\delta x^{\frac{1}{4}}} e^{is^4} s\ ds \cong \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty} e^{is^4} s\ ds$$

Cambiamos los límites de integración porque en la cabecera del ejercicio nos dice que “x” tiende a infinito.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty} e^{is^4} s\ ds \cong \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

y como queremos saber lo que vale:

$$Re\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{x}}e^{\frac{i\pi}{4}} \cong \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

Hoja 6 Ejercicio 8-c)

$$\int_0^1 e^{ix(t-sent)}dt \quad , \quad x \to \infty$$

Vemos que la integral tiene la forma de:

$$I(x) = \int_a^b \mathrm{f(t)e^{i\alpha\psi(t)}}\, dt\,, \alpha \to \infty$$

Reconociendo los elementos de la integral:

f(t)= 1; $\psi(t) = t - sent$

viendo el orden de la derivada que es distinta de cero:

$\psi(t) = t - sent$, $\psi(0) = 0$; $\psi'(t) = 1 - cost$, $\psi'(0) = 0$

$\psi''(t) = sent$, $\psi''(0) = 0$; $\psi'''(t) = cos$, $\psi'''(0) = 1$

la derivada en el cual no se anula $\psi(t)$ es la tercera => n=3

según las notas estamos en el caso en el cual:

- f(t) distinto de 0 y finito,
- ψ(t)>0,
- el punto estacionario está en uno de los límites(inferior),

por lo tanto:

$$I(\alpha) \cong \left[\frac{n!}{\alpha\psi^{(n)}(\mathrm{a})}\right]^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n} f_0(a)e^{i\alpha\psi\ (\mathrm{a}) - \mathrm{i}(\lambda+1)\frac{\pi}{2n}} \cong$$

$$\cong I(\alpha) \cong \left(\frac{3!}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma\left({}^{1}/_{3}\right)}{3} e^{\frac{i\pi}{6}}$$

Por otro lado vemos que:

$\int_0^1 e^{ix(t-sent)}dt = \int_0^{\delta} e^{ix(t-sent)}dt$, si desarrollamos por Taylor (t - sent) nos queda que:

$$\int_0^{\delta} e^{ix(t-t+\frac{t^3}{3!})}dt = \int_0^{\delta} e^{ix\frac{t^3}{3!}}dt \qquad (1)$$

Si hacemos el cambio:

$$t = e^{\frac{i\pi}{6}} s^{\frac{1}{3}} \Rightarrow t^3 = e^{\frac{i\pi}{2}} s \Rightarrow t^3 = is$$

Derivando $t = e^{\frac{i\pi}{6}} s^{\frac{1}{3}}$:

$dt = e^{\frac{i\pi}{6}} \frac{1}{3} s^{\frac{-2}{3}} ds$, con lo que (1) quedará de la forma:

$$\int_0^{\infty} e^{\frac{i\pi}{6}} \frac{1}{3} s^{\frac{-2}{3}} sds\; e^{\frac{x}{6}} = \int_0^{\infty} e^{\frac{i\pi}{6}} \frac{1}{3} s^{\frac{1}{3}} ds\; e^{\frac{x}{6}}$$

Haciendo otro cambio:

$$\frac{x}{6} s = y, \text{si derivamos: } ds = \frac{x}{6} dy$$

$$(6/x)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{3} \int_0^{\infty} s^{\frac{1}{3}}\, s\, ds$$

Con lo que llegamos al mismo resultado:

$$I(x) \cong \left(\frac{3!}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma\left({}^{1}/_{3}\right)}{3} e^{\frac{i\pi}{6}}$$