BELÉN CARO MARROYO

MIGUEL GARCÍA DIÉGUEZ

AMALIA TOBOSO CASTAÑERA

***HOJA 6***

**8. Hallar la conducta principal de las siguientes integrales por el método de la fase estacionaria cuando $x \to \infty$:**

**d)** $\int_0^1 \mathbf{sen}\left[x\left(t+\frac{t^3}{6}-senht\right)\right]\cos t\, dt$

**e)** $\int_{-1}^1 \mathbf{sen}[x(t-sent)]\ senht\, dt$

El método de la fase estacionaria se aplica a integrales del tipo:

$$I(x)=\int_a^b f \quad t \quad e^{ix\Phi(t)}dt$$

Que son integrales de Fourier con puntos estacionarios.

- **Para el apartado d)**:

  Lo primero que notamos al ver la integral, es que

  $$\sin\left[x\left(t+\frac{t^3}{6}-\sinh t\right)\right]=\operatorname{Im}\exp\left[x\left(t+\frac{t^3}{6}-\sinh t\right)\right]$$

  Si tenemos en cuenta esto, podemos aplicar el método de la fase estacionaria a la integral que nos queda:

$$\int_0^1 \sin\left[x\left(t+\frac{t^3}{6}-senht\right)\right]\cos t\,dt =$$

$$= \boldsymbol{Im}\int_0^1 dt\ cost\ exp\left[ix\left(t+\frac{t^3}{6}-senht\right)\right]$$

El punto estacionario de la función Φ(t) está en t=0, que coincide con el límite inferior de integración.

Si calculamos las derivadas de la función Φ(t) en t=0 llegamos a que la primera derivada distinta de cero es la quinta:

$\Phi^{I}(t)=1+\frac{1}{2}t^2-cosht; \Phi^{I}(0)=0$

$\Phi^{II}(t)= t-senht; \Phi^{II}(0)=0$

$\Phi^{III}(t)= 1-cosht; \Phi^{III}(0)=0$

$\Phi^{IV}(t)= -senht;\ \Phi^{IV}(0)=0$

$\Phi^{V}(t)=-cosht;\ \Phi^{V}(0)=-1$

Es importante también saber el valor de f(t) en el punto estacionario:

cos(0)=1

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos calcular el valor de la integral $\int_0^1 dt\ cost\ exp\left[ix\left(t+\frac{t^3}{6}-senht\right)\right]$ a partir de la siguiente expresión:

$$I(x)=\left[-\frac{n!}{x\Phi^{n}(a)}\right]^{\frac{1}{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n}f(a)e^{ix\Phi(a)-i\pi/2n}$$

Sustituyendo nos queda que:

$$\int_0^1 dt\, cost\, exp\left[ix\left(t+\frac{t^3}{6}-senht\right)\right] = \left(\frac{120}{x}\right)^{1/5}\frac{\Gamma(1/5)}{5}e^{-i\pi/10}$$

Pero como nuestra integral es

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left[x\left(t+\frac{t^3}{6}-senht\right)\right]\cos t\, dt =$$
$$= \boldsymbol{Im}\int_0^1 dt\, cost\, exp\left[ix\left(t+\frac{t^3}{6}-senht\right)\right]$$

Tenemos que:

$$I(x) = Im\left[\left(\frac{120}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{5}e^{-\frac{i\pi}{10}}\right] =$$

$$= -\left(\frac{\mathbf{120}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\frac{1}{5}}\frac{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)}{\mathbf{5}}\boldsymbol{sen}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{10}}\right) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x});\quad \boldsymbol{x}\to\infty$$

- **Para el apartado e)**:

  Como ocurría en el apartado anterior, se puede aplicar el método de la fase estacionaria si tenemos en cuenta que:

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sen}[x(t-sent)]\ senht\, dt = Im\int_{-1}^1 dt\ senht\ exp[ix(t-sent)]$$

El punto estacionario de la función Φ(t) está en t=0.

Como t=0 no es uno de los extremos de integración, lo que podemos hacer es descomponer la integral en dos integrales:

$$Im\int_{-1}^{1} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)] =$$

$$= Im\int_{-1}^{0} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)] +$$

$$+Im\int_{0}^{1} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)]$$

Fijémonos en la primera integral:

$$Im\int_{-1}^{0} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)]$$
$$= Im\left[-\int_{0}^{-1} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)]\right]$$

Si hacemos el cambio de t por –t

$$\int_{0}^{-1} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)] = -\int_{0}^{1} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)]$$

Con lo que

$$Im\int_{-1}^{0} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)] = Im\int_{0}^{1} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)]$$

Después de todas estas consideraciones tenemos que:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{sen}[x(t-sent)]\ senht\ dt = Im\int_{-1}^{1} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)] =$$
$$= 2Im\int_{0}^{1} dt\ senht\ exp[ix(t-sent)]$$

Ahora sí que aparece el punto estacionario en el intervalo de integración, con lo que podemos calcular el valor dominante de la misma mediante el método habitual.

Si calculamos las derivadas de la función Φ(t) en t=0 llegamos a que la primera derivada distinta de cero es la tercera:

$\Phi^{I}(t)=1-cost; \Phi^{I}(0)=0$

$\Phi^{II}(t)= sent; \Phi^{II}(0)=0$

$\Phi^{III}(t)= cost; \Phi^{III}(0)=1$

Es importante saber el valor de f(t) en el punto estacionario:

senh(0)=0

Cuando esto ocurre, quiere decir que $f(t) \approx f_0(t-a)^{\lambda}$. Si en nuestro caso hacemos el desarrollo en serie de senht tenemos que:

$$senht = t + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

Nos quedamos con el término cuya derivada en el punto estacionario es distinta de cero, en este caso t. Con lo que $senht \approx t$.

Teniendo en cuenta que:

$$I(x) = \left[-\frac{n!}{x\Phi^{n}(a)}\right]^{\frac{1+\lambda}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{n}\right)}{n} f(a) e^{ix\Phi(a)-i(1+\lambda)\pi/2n}$$

En nuestro caso tendríamos que:

$$\int_0^1 dt\ senht\ \ exp[ix(t-sent)] = \left(\frac{6}{x}\right)^{2/3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3} e^{i\pi/3}$$

Y considerando que

$$I(x) = \int_{-1}^{1} \text{sen}[x(t-sent)]\ senht\, dt =$$

$$= 2Im \int_0^1 dt\ senht\ \ exp[ix(t-sent)]$$

La expresión de la integral quedaría así:

$$\boldsymbol{I(x)} = \left(\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{2/3}} \frac{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)}{\sqrt{\mathbf{3}}},\ \ \boldsymbol{x} \to \infty$$