MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

18) Encuentra todas las soluciones de las ecuaciones integrales:

a) $$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (2y + x)\varphi(y)dy$$

b) $$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_{-1}^{1} (2y + x)\varphi(y)dy$$

En este último caso, emplea también el método de la serie de Neumann para hallar una estimación de orden λ^2 de la solución. .

Solución:

I) Una forma de resolver los diferentes apartados del problema sería tomar una función general para que luego particularicemos en dos casos, el caso homogéneo y el caso no homogéneo. Hay otras formas de resolverlo pero nos guiaremos por esta.
En primer lugar, tenemos que decir que nos encontramos ante una ecuación de Fredholm de segunda especie con núcleo separable. Lo primero lo vemos en los límites de integración y lo segundo se aprecia claramente que podemos escribir el núcleo como:

$$K(x, y) = (2y + x) = 2y + x$$

Por lo tanto vamos a resolver la ecuación mediante el método de constantes que vimos en clase:

Teniendo de forma general:

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^{1} (2y + x)\varphi(y)dy$$

lo podemos escribir como:

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^{1} (2y + x)\varphi(y)dy = g(x) + \lambda \int_{-1}^{1} 2y\varphi(y)dy + \lambda x \int_{-1}^{1} \varphi(y)dy =$$
$$= g(x) + \lambda c_1 + \lambda x c_2$$

Sólo nos queda determinar el valor de las constantes c_i para obtener el resultado del problema. Éstas vienen dadas por:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy = \int_{-1}^{1} 2y(g(y) + \lambda c_1 + \lambda y c_2)dy = \int_{-1}^{1} 2yg(y)dy + \int_{-1}^{1} 2y\lambda c_1 dy + \int_{-1}^{1} 2\lambda y^2 c_2 dy =$$
$$= \int_{-1}^{1} 2yg(y)dy + 2\lambda c_1 (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + \lambda c_2 \frac{4}{3} = \int_{-1}^{1} 2yg(y)dy + \lambda c_2 \frac{4}{3}$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} \varphi(y)dy = \int_{-1}^{1} (g(y) + \lambda c_1 + \lambda y c_2)dy = \int_{-1}^{1} g(y)dy + \int_{-1}^{1} \lambda c_1 dy + \int_{-1}^{1} \lambda y c_2 dy =$$
$$= \int_{-1}^{1} g(y)dy + 2\lambda c_1 + 0 = \int_{-1}^{1} g(y)dy + 2\lambda c_1$$

Como habíamos dicho, tenemos que estudiar dos casos:

a) g(x)=0. Las constantes c_i vienen determinadas por:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} 2yg(y)dy + \lambda c_2 \frac{4}{3} = \lambda c_2 \frac{4}{3}$$
$$c_2 = \int_{-1}^{1} g(y)dy + 2\lambda c_1 = 2\lambda c_1$$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones homogéneo de la forma:

$$0 = -c_1 + \lambda c_2 \frac{4}{3}$$
$$0 = 2\lambda c_1 - c_2$$

que tendrá solución distinta de la trivial (c_1=c_2=0) si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo. Por lo tanto nos queda:

$$\begin{vmatrix} -1 & \frac{4}{3}\lambda \\ 2\lambda & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3/8} \Leftrightarrow \lambda = \begin{matrix} \lambda_1 = \sqrt{3/8} \\ \lambda_2 = -\sqrt{3/8} \end{matrix}$$

Tenemos 2 autovalores. Las soluciones del problema y las autofunciones serian de la forma:

Para $\lambda = \lambda_1$:

$$c_1 = \lambda_1 c_2 \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3/8}\, c_2 = \sqrt{\frac{16\cdot 3}{8\cdot 9}}\, c_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, c_2$$
$$c_2 = 2\lambda_1 c_1 = 2\sqrt{3/8}\, c_1 = \sqrt{\frac{4\cdot 3}{8}}\, c_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, c_1$$

ambas ecuaciones son iguales, lo expresamos todo en función de c_1, que puede ser cualquier valor, por lo que vamos a tener infinitas soluciones que tan sólo difieran en un factor numérico constante:

$$\varphi_1(x) = \sqrt{3/8}\,c_1 + \sqrt{3/8}\,x\sqrt{\frac{3}{2}}c_1 = c_1\left(\sqrt{3/8} + \frac{3}{4}x\right)$$

Y la autofunción:

$$\psi_1(x) = \sqrt{3/8} + \frac{3}{4}x$$

Para $\lambda = \lambda_2$:

$$c_1 = \lambda_2 c_2 \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\sqrt{3/8}\,c_2 = -\sqrt{\frac{16\cdot 3}{8\cdot 9}}c_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}c_2$$

$$c_2 = 2\lambda_2 c_1 = -2\sqrt{3/8}\,c_1 = -\sqrt{\frac{4\cdot 3}{8}}c_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}c_1$$

$$\varphi_2(x) = -\sqrt{3/8}\,c_1 + \sqrt{3/8}\,x\sqrt{\frac{3}{2}}c_1 = c_1\left(-\sqrt{3/8} + \frac{3}{4}x\right)$$

$$\psi_2(x) = \frac{3}{4}x - \sqrt{3/8}$$

b) Para este caso; g(x) = 1. Tenemos que volver a determinar las constantes, que quedan como:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} 2yg(y)dy + \frac{4}{3}\lambda c_2 = \int_{-1}^{1} 2ydy + \frac{4}{3}\lambda c_2 = \frac{4}{3}\lambda c_2$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} g(y)dy + 2\lambda c_1 = \int_{-1}^{1} dy + 2\lambda c_1 = 2 + 2\lambda c_1$$

Que forman el sistema de ecuaciones:

$$0 = -c_1 + \frac{4}{3}\lambda c_2$$

$$2 = -2\lambda c_1 + c_2$$

Resolviendo por Cramer nos queda:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{3}\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & \frac{4}{3}\lambda \\ -2\lambda & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{8}{3}\lambda}{\frac{8}{3}\lambda^2 - 1} = \frac{\frac{8}{3}\lambda}{1 - \frac{8}{3}\lambda^2}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & \frac{4}{3}\lambda \\ -2\lambda & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{\frac{8}{3}\lambda^2 - 1} = \frac{2}{1 - \frac{8}{3}\lambda^2}$$

La solución de la ecuación integral se nos queda como:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\frac{8}{3}\lambda^2}{1 - \frac{8}{3}\lambda^2} + \frac{2x\lambda}{1 - \frac{8}{3}\lambda^2}$$

La ecuación integral no homogénea no tendrá solución si los valores de λ son justamente las soluciones de la ecuación:

$$1 - \frac{8}{3}\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{3/8}$$

Cuyo valor coincide, como se muestra, con el primer autovalor que obtuvimos para la homogénea.

II) En este segundo apartado nos piden dar la solución de la ecuación no homogénea mediante el método de las series de Neumann. Este método consiste tomar soluciones aproximadas. Es un proceso de tipo iterativo en el que usamos la solución que hemos obtenido y volvemos a operar obteniendo una nueva aproximación.

En general este método propone que si tenemos una ecuación de Fredholm del tipo:

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy$$

Podemos dar como primera aproximación ó solución inicial

$$\varphi_0(x) = g(x)$$

Con lo que se hace la suposición de que el segundo término $\lambda\int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy$ es muy pequeño. Como hemos dicho, el método trabaja como un "programa iterativo", por lo que la segunda aproximación la obtenemos mediante la primera de la forma:

$$\varphi_1(x) = g(x) + \lambda\int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi_0(y)dy$$

Es decir, la aproximación de orden n+1 se obtiene de la aproximación de orden n a través de la relación de recurrencia:

$$\varphi_{n+1}(x) = g(x) + \lambda\int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi_n(y)dy$$

Repitiendo el proceso n veces se tiene:

$$\varphi(x) \approx \varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m U_m(x)$$

Si hacemos tender n a infinito, obtenemos la serie de Neumann. Con lo que la solución se nos queda como:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \lambda^m U_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m U_m(x)$$

Es decir, esperamos que la serie de Neumann converja a la solución φ(x). Sólo convergerá para determinados valores de λ que cumplan el siguiente teorema:
"Supongamos que el núcleo k(x, y) es de cuadrado sumable en el cuadrado a < x < b, a < y < b, es decir, supongamos que

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 \, dxdy = \alpha^2$$

siendo α un valor finito. Entonces la serie de Neumann converge hacia la solución φ(x) de la ecuación integral siempre que

$$|\lambda| < \frac{1}{\alpha} \text{"}$$

En nuestro caso, nos pide que lleguemos hasta una estimación de orden λ^2. Tal y como lo hemos definido anteriormente, la primera aproximación viene dada por:

$$\varphi_0(x) = g(x) = 1$$

La segunda:

$$\varphi_1(x) = g(x) + \lambda\int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi_0(y)dy = 1 + \lambda\int_{-1}^{1}(2y+x)\varphi_0(y)dy =$$
$$= 1 + \lambda\int_{-1}^{1}(2y+x)dy = 1 + \lambda\int_{-1}^{1}2ydy + \lambda x\int_{-1}^{1}dy = 1 + 0 + 2\lambda x = 2\lambda x + 1$$

Aun tenemos orden 1, por lo que tenemos que seguir iterando. Para la tercera:

$$\varphi_2(x) = g(x) + \lambda\int_{-1}^{1}(2y+x)\varphi_1(y)dy = 1 + \lambda\int_{-1}^{1}(2y+x)(2\lambda y+1)dy =$$
$$= 1 + \lambda\int_{-1}^{1}4y^2\lambda dy + \lambda\int_{-1}^{1}2ydy + 2\lambda^2 x\int_{-1}^{1}ydy + \lambda x\int_{-1}^{1}dy =$$
$$= 1 + \frac{4}{3}\lambda^2\cdot 2 + \lambda\cdot 0 + 2\lambda^2 x\cdot 0 + \lambda x\cdot 2 = \frac{8}{3}\lambda^2 + 2x\lambda + 1$$

En esta aproximación ya tenemos un λ de segundo orden. Si volvemos a iterar obtendríamos un λ de tercer orden ya que como hemos dicho:

$$\varphi(x) \approx \varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n}\lambda^m U_m(x)$$

En los que los Um(x) equivalen a:

$$\mathrm{U}_0(x) = g(x); \mathrm{U}_1(x) = \int_a^b k(x,y_1)g(y_1)dy_1;$$
$$\mathrm{U}_2(x) = \int_a^b\int_a^b k(x,y_1)k(y_1,y_2)g(y_2)dy_1;....$$

Por lo que el orden de λ vendrá determinado por n. Cada estimación será un polinomio de grado n ya que m va de 0 a n. No obstante vamos a ver que para la tercera aproximación conseguimos un polinomio en λ de grado 3:

$$\varphi_3(x) = g(x) + \lambda\int_{-1}^{1}(2y+x)\varphi_2(y)dy = 1 + \lambda\int_{-1}^{1}(2y+x)(\frac{8}{3}\lambda^2 + 2y\lambda + 1)dy =$$
$$= 1 + \lambda\int_{-1}^{1}\frac{16}{3}\lambda^2 ydy + \lambda\int_{-1}^{1}4y^2\lambda dy + \lambda\int_{-1}^{1}2ydy + \lambda\int_{-1}^{1}\frac{8}{3}x\lambda^2 dy + 2\lambda^2\int_{-1}^{1}ydy + \lambda x\int_{-1}^{1}dy =$$
$$= 1 + \lambda^3\cdot 0 + 4/3\,\lambda^2\cdot 2 + \lambda\cdot 0 + \frac{8}{3}x\lambda^3\cdot 2 + 2\lambda^2\cdot 0 + \lambda x\cdot 2 =$$
$$= 1 + \frac{8}{3}\lambda^2 + \frac{16}{3}x\lambda^3 + 2\lambda x = \frac{16}{3}x\lambda^3 + \frac{8}{3}\lambda^2 + 2\lambda x + 1$$

Nos queda decir para qué valores es válida esta solución, es decir, cuáles son los valores de λ que hacen que la serie de Neumann converja a la solución de nuestro problema.

Para nuestro caso, α viene dado por:

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\,dxdy = \alpha^2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |2y+x|^2\,dxdy =$$
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 4y^2dxdy + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2dxdy \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 4xydxdy = 2\frac{4}{3}2 + 2\frac{2}{3} + 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{20}{3} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{20}{3}}$$

Y por lo tanto, una estimación de la solución de orden de λ^2 es:

$$\varphi(x) \approx \frac{8}{3}\lambda^2 + 2x\lambda + 1$$

siempre que:

$$|\lambda| < \sqrt{\frac{3}{20}}$$

Conocida la solución real del problema y una aproximación de ésta, podríamos ver cuánto es de acertada la aproximación, es decir, tenemos que comparar ésta con el resultado real.
Para ello vamos a desarrollar la expresión que obtuvimos para el caso exacto, teniendo en cuenta que λ es pequeño, se tiene:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\frac{8}{3}\lambda^2}{1-\frac{8}{3}\lambda^2} + \frac{2x\lambda}{1-\frac{8}{3}\lambda^2}$$

$$\frac{1}{1-x} \approx \sum_{n=1} x^n \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{8}{3}\lambda^2} \approx \sum_{n=1} (\frac{8}{3}\lambda^2)^n = 1 + \frac{8}{3}\lambda^2 + O(\lambda^3)$$

$$\varphi(x) \approx 1 + \frac{8}{3}\lambda^2(1 + \frac{8}{3}\lambda^2 + O(\lambda^3)) + 2x\lambda(1 + \frac{8}{3}\lambda^2 + O(\lambda^3))$$

$$\varphi(x) \approx 1 + \frac{8}{3}\lambda^2 + \frac{64}{9}\lambda^4 + O(\lambda^5) + 2x\lambda + \frac{16}{3}\lambda^3 + O(\lambda^4)$$

$$\varphi(x) \approx 1 + 2x\lambda + \frac{8}{3}\lambda^2 + O(\lambda^3) \Rightarrow \varphi(x) \approx 1 + 2x\lambda + \frac{8}{3}\lambda^2$$

Al desarrollar la solución exacta, vemos que para términos hasta $\lambda^{2,}$ la solución aproximada del método de Neumann coincide con la exacta.

ALMUDENA SÁNCHEZ RODRÍGUEZ
JESÚS CINTAS LEAL