Sara Benítez Berrocal

Sara Gutiérrez López

<u>Hoja 5. Problema 17</u>

Sea la ecuación integral

$$\boldsymbol{\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} sen(x+y)\varphi(y)\, dy}$$

a) **Halla las autofunciones y valores propios de la ecuación homogénea ($g(x) = 0$)**
b) **Encuentra las soluciones (si existen) de la ecuación integral si**

   1) $\lambda = 1$ **y** $g(x) = x$
   2) $\lambda = 1/\pi$ **y** $g(x) = sen(2x)$
   3) $\lambda = 1/\pi$ **y** $g(x) = sen(x)$

a) $g(x) = 0$

Vamos a resolver el problema homogéneo.

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} sen(x+y)\varphi(y)\, dy =$$
$$= \lambda \int_0^{2\pi} (senx\, cosy + cosx\, seny)\, \varphi(y)\, dy =$$
$$= \lambda\, senx \int_0^{2\pi} cosy\ \ \varphi(y)\, dy + \lambda\, cosx \int_0^{2\pi} seny\ \ \varphi(y)\, dy =$$
$$= \lambda c_1\, senx + \lambda c_2\, cosx$$

Calculamos c_1 y c_2,

$$c_1 = \int_0^{2\pi} cosy\ \ \varphi(y)\, dy = \int_0^{2\pi} cosy[\, \lambda c_1\, senx + \lambda c_2\, cosx]\, dy =$$

$$= \lambda c_1 \int_0^{2\pi} cosy\, seny\, dy\ + \lambda c_2 \int_0^{2\pi} cos^2 y\ \ dy\ = \lambda c_2 \pi$$

$$c_2 = \int_0^{2\pi} seny\ \ \varphi(y)\ dy = \int_0^{2\pi} seny[\ \lambda c_1\ senx + \lambda c_2\ cosx]\ dy =$$

$$= \lambda c_1 \int_0^{2\pi} sen^2 y\ dy\ \ + \lambda c_2 \int_0^{2\pi} cosy\ seny\ \ dy\ \ = \lambda c_1 \pi$$

Por tanto, tenemos el sistema para calcular los autovalores,

$$\begin{cases} c_1 = \lambda c_2 \pi \\ c_2 = \lambda c_1 \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 - \lambda c_2 \pi \\ 0 = c_2 - \lambda c_1 \pi \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ \lambda\pi & -1 \end{vmatrix} = -1 + (\lambda\pi)^2 = 0$$

$$(\lambda\pi)^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{\pi^2}} = \pm\frac{1}{\pi}$$

El problema tiene solución si y sólo si,

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_1 = \dfrac{1}{\pi} \\ \text{ó} \\ \lambda = \lambda_2 = -\dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

A continuación buscamos la autofunción para cada autovalor,

- Para: $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\pi}$

  $$\begin{matrix} c_1 = c_2 \\ c_2 = c_1 \end{matrix} \rightarrow\ \varphi(x) = \lambda_1(c_1\ senx + c_2\ cosx) = \frac{1}{\pi}c_1(senx +\ cosx)$$

  Por tanto, la autofunción sería,

  $$\Psi_1(x) = senx + cosx$$

- Para: $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$

  $$\begin{matrix} c_1 = -c_2 \\ c_2 = -c_1 \end{matrix} \rightarrow\ \varphi(x) = \lambda_2(c_1\ senx + c_2\ cosx) = -\frac{1}{\pi}c_1(senx -\ cosx)$$

  Por tanto,

  $$\Psi_2(x) = senx - cosx$$

b) Encuentra las soluciones (si existen) de la ecuación integral si

1. $\boldsymbol{\lambda = 1}$ **y** $\boldsymbol{g(x) = x}$

Vamos a resolver por el método del núcleo separable.

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} sen(x+y)\varphi(y)\, dy =$$
$$= g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} (senx\; cosy + cosx\; seny)\, \varphi(y)\, dy =$$
$$= g(x) + \lambda\, senx \int_0^{2\pi} cosy\;\; \varphi(y)\, dy + \lambda\, cosx \int_0^{2\pi} seny\;\; \varphi(y)\, dy =$$
$$= g(x) + \lambda c_1\, senx + \lambda c_2\, cosx$$

Calculamos c_1,

$$c_1 = \int_0^{2\pi} cosy\;\; \varphi(y)\, dy = \int_0^{2\pi} cosy[\, g(x) + \lambda c_1\, senx + \lambda c_2\, cosx]\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} cosy\;\; g(y)\, dy + \lambda c_1 \int_0^{2\pi} cosy\; seny\, dy\;\; + \lambda c_2 \int_0^{2\pi} cos^2 y\;\; dy\;\; =$$

$$= \int_0^{2\pi} cosy\;\; g(y)\, dy + \lambda c_2 \pi$$

Sustituyendo el valor de $g(y)$ y de λ ,

$$c_1 = \int_0^{2\pi} y\; cosy\;\; dy + c_2\pi = (cosy + y\; seny)|_0^{2\pi} + c_2\pi = c_2\pi$$

Calculamos ahora el valor de c_2,

$$c_2 = \int_0^{2\pi} seny\;\; \varphi(y)\, dy = \int_0^{2\pi} seny[\;\, g(x) + \lambda c_1\, senx + \lambda c_2\, cosx]\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} seny\;\; g(y)\, dy + \lambda c_1 \int_0^{2\pi} sen^2 y\, dy\;\; + \lambda c_2 \int_0^{2\pi} cosy\; seny\;\; dy\;\; =$$

$$= \int_0^{2\pi} seny\;\; g(y)\, dy + \lambda c_1 \pi$$

Sustituyendo $g(y)$ y λ,

$$c_2 = \int_0^{2\pi} y\, seny\ \ dy + \lambda c_1 \pi = (seny - y\, cosy)|_0^{2\pi} + c_1\pi = c_1\pi - 2\pi$$

Por lo que tenemos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} c_1 = c_2\pi \\ c_2 = c_1\pi - 2\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -c_1 + c_2\pi \\ 2\pi = c_1\pi + c_2 \end{cases}$$

Resolviendo,

$$c_1 = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 1}$$

$$c_2 = \frac{2\pi}{\pi^2 - 1}$$

Por lo que el sistema tiene solución para $\lambda = 1$. Por tanto,

$$\varphi(x) = x + \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 1}\ senx + \frac{2\pi}{\pi^2 - 1}\ cosx$$

2. $\boldsymbol{\lambda = {}^{1}/_{\pi}}$ **y** $\boldsymbol{g(x) = sen(2x)}$

Sustituimos y calculamos c_1 y c_2 ,

$$c_1 = \int_0^{2\pi} cosy\ \ sen2y\, dy + c_2 = \left(\frac{-cosy}{2} - \frac{cos3y}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} + c_2 = c_2$$

$$c_2 = \int_0^{2\pi} seny\, sen2y\, dy + c_1 = \left(\frac{seny}{2} - \frac{sen3y}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} + c_1 = c_1$$

Por lo que el sistema,

$$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_2 = c_1 \end{cases}$$

Donde la solución por tanto es,

$$\varphi(x) = sen2x + \frac{1}{\pi}\ c_1 senx + \frac{1}{\pi}\ c_1\ cosx = sen2x + c\ (senx + cosx)$$

3. $\boldsymbol{\lambda = {}^{1}/_{\pi}}$ **y** $\boldsymbol{g(x) = sen(x)}$

Calculamos c_1 y c_2 ,

$$c_1 = \int_0^{2\pi} cosy \; seny \, dy + c_2 = c_2$$

$$c_2 = \int_0^{2\pi} sen^2 y \; dy + c_1 = \pi + c_1$$

Teniendo el sistema,

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = \pi \end{cases}$$

El sistema no tiene solución lo que implica que la ecuación integral no tiene solución.