Ejercicios de Métodos de la Física Matemática
Curso: **2009/10**
Alumnas: **Clara Eugenia Martínez Vázquez**
Isabel María Alfonso Naranjo

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Halla todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) = x^3 - x + \lambda \int_{-1}^{1} dy\left(x^2 - 2xy\right)\varphi(y) \qquad (1)$$

Interpreta los resultados obtenidos mediante el teorema de la alternativa de Fredholm.

La fórmula general de la ecuación integral es:

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_{a}^{b} dy\, k(x,y)\varphi(y) \qquad (2)$$

Comparándola con la del enunciado, apreciamos lo siguiente:

- $g(x) = x^3 - x$
- $k(x,y) = \left(x^2 - 2xy\right)$

→ **Núcleo separable pues tiene la forma:**

$$K(x,y) = \sum_{1}^{n} \phi_i(x) X_i(y)$$

- a=-1 y b=1

Con lo cual, la ecuación es inhomogénea de Fredholm de segunda especie con núcleo separable (no simétrico).

1) **En primer lugar vamos a resolver la ecuación homogénea, es decir, para g(x)=0. Hacemos esta parte únicamente para obtener los autovalores.**

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} dy\left(x^2 - 2xy\right)\varphi(y) = \lambda x^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} dy\varphi(y)}_{C_1} - 2\lambda x \underbrace{\int_{-1}^{1} dy\, y\, \varphi(y)}_{C_2}$$

$$\downarrow$$

$$\varphi(x) = \lambda x^2 C_1 - 2\lambda x C_2$$

- $C_1 = \int_{-1}^{1} dy\, (\lambda y^2\, C_1 - 2\lambda x C_2) = \frac{2}{3}\lambda C_1$
- $C_2 = \int_{-1}^{1} dy\, y\, \left(\lambda y^2 C_1 - 2\lambda y C_2\right) = -\frac{4}{3}\lambda C_2$

Del sistema anterior obtendremos el siguiente determinante, que lo igualamos a cero para obtener solución distinta de la trivial.

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & 1+\dfrac{4}{3}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Llegando finalmente a obtener:

$$\lambda_1 = \tfrac{3}{2} \longrightarrow \varphi_1(x) = \tfrac{3}{2}Cx^2 \Longrightarrow \Psi_1(x) = x^2$$

$$\lambda_2 = -\tfrac{3}{4} \longrightarrow \varphi_2(x) = \tfrac{3}{2}Cx \Longrightarrow \Psi_1(x) = x$$

2) **La ecuación (1) podemos escribirla de la siguiente manera, teniendo en cuenta ya la inhomogénea:**

$$\varphi(x) = x^3 - x + \lambda x^2 \int_{-1}^{1} dy\, \varphi(y) - 2\lambda x \int_{-1}^{1} dy\, y\, \varphi(y) \qquad (3)$$

Definiendo:

- $C_1 = \int_{-1}^{1} dy\, \varphi(y)$ **(4)**
- $C_2 = \int_{-1}^{1} dy\, y\, \varphi(y)$ **(5)**

Quedando la ecuación integral reducida a:

$$\varphi(x) = x^3 - x + \lambda x^2 C_1 - 2\lambda x C_2 \qquad (6)$$

Nuestro propósito ahora es determinar C_1 y C_2, para lo cual sustituimos la ecuación (6) en (4) y (5) respectivamente. Obteniendo:

- $C_1 = \int_{-1}^{1} dy\ (y^3 - y + \lambda y^2 C_1 - 2\lambda y C_2) = \frac{2}{3}\lambda C_1$

- $C_2 = \int_{-1}^{1} dy\, y\ (y^3 - y + \lambda y^2 C_1 - 2\lambda y C_2) = -\frac{4}{15} - \frac{4}{3}\lambda C_2$

Operando:

- $C_1\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) = 0$
- $C_2\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) = -\frac{4}{15}$

Analizando, tenemos:

- **Si λ no es autovalor**

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ \\ C_2 = \dfrac{-4/15}{(1+4/3\lambda)} \end{array}\right\} \quad \boxed{\varphi(x) = x^3 - x - 2\lambda x \frac{-4/15}{(1+4/3\lambda)}}$$

- **Si $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$**

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = C_1 = C \\ \text{(cte arbitraria)} \\ \\ C_2 = \dfrac{-4}{45} \end{array}\right\} \quad \boxed{\varphi(x) = x^3 - x + \frac{3}{2}x^2 C + \frac{4}{15}x}$$

- **Si $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{4}$**

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ \\ C_2 = \infty \end{array}\right\} \quad \boxed{\nexists \text{ solución}}$$

Alumnas: **Clara Eugenia Martínez Vázquez**
Isabel María Alfonso Naranjo

3) El primer caso cumple el teorema de la alternativa de Fredholm, pues el problema inhomogéneo tiene solución cuando λ no es un autovalor.

Sin embargo en el segundo y tercer caso imponemos que λ sea un autovalor y vemos que en un caso tiene solución y en el otro no. Trataremos de demostrar nuestras soluciones a través de la excepción al teorema de la alternativa de Fredholm:

$$\int_a^b dx\, \varphi(x) g(x) = 0$$

I. Lo primero que haremos será buscar las autofunciones del núcleo traspuesto.

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b dy\, K(y, x)\, \varphi(y)$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b dy\, (y^2 - 2xy) \varphi(y) = \lambda \int_{-1}^1 dy\, y^2\, \varphi(y) - 2\lambda x \int_{-1}^1 dy\, y\, \varphi(y)$$

Dando un valor a las integrales, la ecuación queda reducida a:

$$\varphi(x) = \lambda A - 2\lambda x B$$

Calculando las constantes:

- $A = \int_{-1}^1 dy\, y^2 (\lambda A - 2\lambda y B) = \frac{2}{3}\lambda A$

- $B = \int_{-1}^1 dy\, y (\lambda A - 2\lambda y B) = -\frac{4}{3}\lambda B$

Operando tendremos:

$$\left.\begin{aligned} A\left(1 - \tfrac{2}{3}\lambda\right) &= 0 \\ B\left(1 - \tfrac{4}{3}\lambda\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{3}{2} \\ \lambda_2 &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Particularizando para cada autovalor:

- $\lambda=\lambda_1 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} A=\text{cualquiera} \\ \\ B=0 \end{array}\right\}$ $\varphi(x)=\frac{3}{2}A$ $\boxed{\Psi_1=1}$

- $\lambda=\lambda_2 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} A=0 \\ \\ B=\text{cualquiera} \end{array}\right\}$ $\varphi(x)=-\frac{3}{2}Bx$ $\boxed{\Psi_2=x}$

II. **Pudiendo pasar ya a comprobar si se cumple o no el teorema de la alternativa de Fredholm:**

- $\int_{-1}^{1} dx\varphi_1(x)g(x)=\int_{-1}^{1} dx\,(x^3-x)=0$

  Lo cual nos indica que la ecuación no homogénea tiene solución para $\lambda=\lambda_1$

- $\int_{-1}^{1} dx\varphi_2(x)g(x)=\int_{-1}^{1} dx\,(x^3-x)x=\frac{-4}{15}\neq 0$

  Viendo entonces que para $\lambda=\lambda_2$ la ecuación no homogénea no tiene solución.

Comparando con el resultado que obtuvimos en el apartado 2), vemos que todo coincide. Quedando comprobado el teorema de la alternativa de Fredholm.