Leticia Jaén Tapia

HOJA 5. PROBLEMA 19:

Halla todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 dy\, k(x,y)\varphi(y)$$

Donde

$$k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{senh(x)senh(y-1)}{senh1}, & 0\le x\le y,\\[2mm] \dfrac{senh(y)senh(x-1)}{senh1}, & y\le x\le 1.\end{cases}$$

$Dato: \cosh(x-1)senh(x)-\cosh(x)senh(x-1)=senh1.$

Tenemos:

$$\boxed{\varphi(x)=\lambda\int_0^x \frac{senh(y)senh(x-1)}{senh1}\varphi(y)dy+\lambda\int_x^1 \frac{senh(x)senh(y-1)}{senh1}\varphi(y)dy} \qquad (1)$$

Reducimos la ecuación integral a una ecuación diferencial, para ello aplicamos Leibnitz y obtenemos la siguiente expresión:

$$\varphi'(x)=\lambda\int_0^x \frac{senh(y)\cosh(x-1)}{senh(1)}\varphi(y)dy+\lambda\frac{senh(x)senh(x-1)}{senh(1)}\varphi(x)$$
$$+\lambda\int_x^1 \frac{\cosh(x)senh(y-1)}{senh(1)}\varphi(y)dy-\lambda\frac{senh(x)senh(x-1)}{senh(1)}\varphi(x)$$

$$\boxed{\varphi'(x)=\lambda\int_0^x \frac{senh(y)\cosh(x-1)}{senh1}\varphi(y)dy+\lambda\int_x^1 \frac{\cosh(x)senh(y-1)}{senh(1)}\varphi(y)dy} \qquad (2)$$

Volvemos a aplicar Leibnitz y hallamos la segunda derivada.

$$\varphi''(x)=\lambda\int_0^x \frac{senh(y)senh(x-1)}{senh1}\varphi(y)dy+\lambda\frac{senh(x)\cosh(x-1)}{senh(1)}\varphi(x)$$
$$+\lambda\int_x^1 \frac{senh(x)senh(y-1)}{senh(1)}\varphi(y)dy-\lambda\frac{\cosh(x)senh(x-1)}{senh(1)}\varphi(x)$$

$$\boxed{\varphi''(x)=\lambda\int_0^x \frac{senh(y)senh(x-1)}{senh1}\varphi(y)dy+\lambda\int_x^1 \frac{senh(x)senh(y-1)}{senh(1)}\varphi(y)dy+\lambda\varphi(x)} \quad (3)$$

Observamos que las integrales han tomando la forma inicial, por tanto, podemos hacer el siguiente cambio.

$$\varphi''(x)=\varphi(x)+\lambda\varphi(x)$$

$$\boxed{\varphi''(x)=(1+\lambda)\varphi(x)} \quad (4)$$

Buscamos nuestras condiciones de contorno. Para ello damos valores x=0 y x=1 a nuestra ecuación principal.

$$\varphi(0)=\lambda\int_0^0 \frac{senh(y)senh(0-1)}{senh1}\varphi(y)dy+\lambda\int_0^1 \frac{senh(0)senh(y-1)}{senh1}\varphi(y)dy=0 \quad (5)$$

$$\varphi(1)=\lambda\int_0^1 \frac{senh(y)senh(1-1)}{senh1}\varphi(y)dy+\lambda\int_1^1 \frac{senh(1)senh(y-1)}{senh1}\varphi(y)dy=0 \quad (6)$$

Por tanto nuestras condiciones de contorno serán:

$$\varphi(0)=0$$
$$\varphi(1)=0$$

Ahora calcularemos nuestros autovalores y autofunciones siendo nuestra ecuación diferencial la que vemos en (4). Estaríamos ante un problema de Sturm-Liouville. Analizamos los distintos casos:

Si λ=-1

Nuestra ecuación sería

$$\varphi(x)=Ax+B$$

Teniendo en cuentas las condiciones de contorno que hemos obtenido en (5) y (6).

$$\varphi(1)=A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$\varphi(0)=B=0 \Rightarrow A=0$$

Con lo que llegamos a la solución trivial en este caso.

Si λ<-1

$$\varphi(x) = A\cosh\sqrt{\lambda+1}x + Bsenh\sqrt{\lambda+1}x$$

Si en esta solución tomamos x=0 obtenemos

$$\varphi(0) = A\cosh\sqrt{\lambda+1}\cdot 0 + Bsenh\sqrt{\lambda+1}\cdot 0 = 0$$

Teniendo en cuentas las condiciones de contorno

$$A = 0$$

Por tanto

$$\varphi(x) = Bsenh\sqrt{\lambda+1}$$

Teniendo en cuenta la segunda condición de contorno.

$$\varphi(1) = Bsenh\sqrt{\lambda+1} = 0$$

Esta relación verifica que se cumple al menos una de las tres condiciones:

$$\begin{aligned} &B = 0 \\ &\sqrt{\lambda+1} = 0 \\ &senh\sqrt{\lambda+1} = 0 \end{aligned}$$

La primera nos lleva a la solución trivial. La segunda nos lleva a λ=1 que nos satisface la suposición inicial. La última opción es imposible si λ<1. Por tanto llegamos a que si λ<1 no existe ninguna solución posible (a parte de la trivial) del problema de Sturm-Liouville.

Si λ>1

$$\varphi(x) = A\cos\sqrt{\lambda+1}\,x + Bsen\sqrt{\lambda+1}\,x$$

Si tomamos otra vez x=0, obtenemos A=0, por tanto

$$\varphi(x) = Bsen\sqrt{\lambda+1}\,x$$

Imponiendo la segunda condición de contorno

$$\varphi(1) = Bsen\sqrt{\lambda+1} = 0$$

La relación se verificará si se cumple al menos una de las tres condiciones:

$$\begin{aligned} &B = 0 \\ &\sqrt{\lambda+1} = 0 \\ &sen\sqrt{\lambda+1} = 0 \end{aligned}$$

En este caso nos quedamos con la última opción. La primera la descartamos porque nos llevaría a la solución trivial y la segunda nos llevaría a λ=1, que nos es la suposición que estamos analizando, por lo que no nos vale.

$$sen\sqrt{\lambda+1}=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda+1}=n\pi, \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{\lambda=\lambda_n \equiv (n\pi)^2-1}$$

Concluimos entonces que sólo cuando $\lambda=\lambda_n \equiv (n\pi)^2-1$, el problema de Sturm-Liouville tiene solución. Esta solución es la función

$$\boxed{\psi_n(x)=Bsen(\sqrt{\lambda_n+1}\ x)=Bsen\sqrt{(n\pi)^2}\ x}$$

Donde B es una constante cualquiera, λn el autovalor y ψn(x) la autofunción correspondiente a ese autovalor, del problema de Sturm-Liouville.