PROBLEMA 20 - HOJA 5

a) Halla los autovalores y autofunciones de la ecuación integral $\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}dyk(x,y)\varphi(y)$ donde

$$k(x,y)=\begin{cases}\cos(x)sen(y) & ,0\le x\le y\\ \cos(y)sen(x) & ,y\le x\le \pi\end{cases}$$

b) Halla la solución de la ecuación integral $\varphi(x)=1+\lambda\int_0^{\pi}dyk(x,y)\varphi(y)$

a) La ecuación integral $\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}dyk(x,y)\varphi(y)$ es una ecuación de Fredholm homogénea $(g(x)=0)$, de segunda especie $(h(x)=1\neq 0)$. Para hallar sus autovalores λ_n y las autofunciones Ψ_n, reduciremos nuestra ecuación integral a un problema de Sturm-Liouville (con condiciones de contorno). Nuestro núcleo $k(x,y)$ es real y simétrico.

Sustituimos $k(x,y)$ por su valor, separando la integral en dos intervalos: $\begin{cases}(0,x) & ,y\le x\\ (x,\pi) & ,y\ge x\end{cases}$

El núcleo $k(x,y)$ toma la forma *cos(x)sen(y)* cuando la variable de integración y es mayor que *x*, $(x\le y)$, por lo tanto, cuando y va de x a π; el núcleo $k(x,y)$ toma la forma *cos(y)sen(x)* cuando $y\le x$, por lo tanto cuando y va de *0* a *x*.

Luego

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}dyk(x,y)\varphi(y)=\lambda\int_0^{x}dy\varphi(y)\cos(y)sen(x)+\lambda\int_x^{\pi}dy\varphi(y)\cos(x)sen(y);$$

$$\boxed{\varphi(x)=\lambda\left[sen(x)\int_0^{x}\cos(y)\varphi(y)dy+\cos(x)\int_x^{\pi}sen(y)\varphi(y)dy\right]}\qquad(1)$$

Aplicamos la <u>regla de Leibniz</u> para reducir nuestra ecuación integral a una ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}dyF(x,y)=\int_{a(x)}^{b(x)}dy\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)+F(x,b(x))\frac{db(x)}{dx}-F(x,a(x))\frac{da(x)}{dx}}$$

$$\varphi'(x)=\lambda\left[\cos(x)\int_0^{x}dy\varphi(y)\cos(y)+sen(x)\underbrace{\frac{d}{dx}\int_0^{x}dy\varphi(y)\cos(y)}_{Leibniz}-\right.$$

$$\left.-sen(x)\int_x^{\pi}dy\varphi(y)sen(y)+\cos(x)\underbrace{\frac{d}{dx}\int_x^{\pi}dy\varphi(y)sen(y)}_{Leibniz}\right]\quad;$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x dy\, \overbrace{\varphi(y)\cos(y)}^{F(y,y)\equiv F(x,y)} \overset{\overbrace{}^{Leibniz}}{=} \int_0^x dy\, \cancel{\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{F(x,y)}_{F(y,y)}}^{0} + F(x,x)\cancel{\frac{dx}{dx}}^{1} - F(x,0)\cancel{\frac{d0}{dx}}^{0} = F(x,x) = \cos(x)\varphi(x) \\ \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^\pi dy\, \underbrace{\varphi(y)sen(y)}_{F(y,y)\equiv F(x,y)} \overset{\overbrace{}^{Leibniz}}{=} \int_x^\pi dy\, \cancel{\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{F(x,y)}_{F(y,y)}}^{0} + F(x,\pi)\cancel{\frac{d\pi}{dx}}^{0} - F(x,x)\cancel{\frac{dx}{dx}}^{1} = -F(x,x) = -sen(x)\varphi(x) \end{cases} ;$$

Por lo tanto:

$$\varphi'(x) = \lambda\left[\cos(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) + \cancel{sen(x)\varphi(x)\cos(x)} - sen(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y) - \cancel{\cos(x)\varphi(x)sen(x)}\right]$$

$$\boxed{\varphi'(x) = \lambda\left[\cos(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) - sen(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y)\right]} \qquad (2)$$

Volvemos a aplicar la regla de Leibniz para obtener $\varphi''(x)$:

$$\varphi''(x) = \lambda\left[-sen(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) + \cos(x)\overbrace{\frac{d}{dx}\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y)}^{Leibniz} - \cos(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y) - sen(x)\overbrace{\frac{d}{dx}\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y)}^{Leibniz}\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x dy\, \overbrace{\varphi(y)\cos(y)}^{F(y,y)\equiv F(x,y)} = \int_0^x dy\, \cancel{\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)}^{0} + F(x,x)\cancel{\frac{dx}{dx}}^{1} - F(x,0)\cancel{\frac{d0}{dx}}^{0} = F(x,x) = \cos(x)\varphi(x) \\ \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y) = \int_x^\pi dy\, \cancel{\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)}^{0} + F(x,\pi)\cancel{\frac{d\pi}{dx}}^{0} - F(x,x)\cancel{\frac{dx}{dx}}^{1} = -F(x,x) = -sen(x)\varphi(x) \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\varphi''(x) = \lambda\left[-sen(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) + \cos^2(x)\varphi(x) - \cos(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y) + sen^2(x)\varphi(x)\right]$$

$$\varphi''(x) = \lambda\left[-sen(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) + \overbrace{(sen^2 x + \cos^2 x)}^{1}\varphi(x) - \cos(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y)\right]$$

$$\varphi''(x) = \lambda\left[\varphi(x) - \left(sen(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) + \cos(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y)\right)\right]$$

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) - \underbrace{\lambda\left[sen(x)\int_0^x dy\varphi(y)\cos(y) + \cos(x)\int_x^\pi dy\varphi(y)sen(y)\right]}_{\varphi(x)} = \lambda\varphi(x) - \varphi(x)$$

Así pues:

$$\varphi''(x) = (\lambda - 1)\varphi(x) \Rightarrow \boxed{\varphi''(x) - (\lambda - 1)\varphi(x) = 0}$$

- Buscamos ahora las <u>condiciones de contorno</u>:

Hacemos $x=\pi$ en la ecuación (1) y $x=0$ en la (2):

$$\begin{cases} \varphi(\pi)=\lambda\left[\cancel{sen(\pi)}^{0}\int_0^{\pi} dy\varphi(y)\cos(y)+\cos\pi\int_{\pi}^{\pi}\cancel{dy\varphi(y)sen(y)}^{0}\right]=0\Rightarrow\varphi(\pi)=0 \\ \varphi'(0)=\lambda\left[\cos(0)\int_0^{0}\cancel{dy\varphi(y)\cos(y)}^{0}d-\cancel{sen(0)}^{0}\int_0^{\pi} dy\varphi(y)sen(y)\right]=0\Rightarrow\varphi'(0)=0 \end{cases}$$

Por lo tanto, hemos reducido nuestra ecuación integral a un problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno de Neumann:

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi''(x)-(\lambda-1)\varphi(x)=0 \\ C.C.\begin{cases}\varphi(\pi)=0\\ \varphi'(0)=0\end{cases}\end{array}}$$

La ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes $\varphi''(x)-(\lambda-1)\varphi(x)=0$, tiene por ecuación característica : $r^2-(\lambda-1)=0$ cuya solución es $r=\pm\sqrt{\lambda-1}$

Tendremos tres casos posibles:

1) $\boxed{\lambda-1=0}\Leftrightarrow\lambda=1$: En este caso tendremos <u>raíz real doble</u>: $r_1=r_2\equiv r=0\Rightarrow$ la solución será del tipo:

$$\boxed{\varphi(x)=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}}\Rightarrow\varphi(x)=C_1e^{0}+C_2xe^{0}\Rightarrow\boxed{\varphi(x)=Ax+B}$$

Aplicamos la 1ª condición de contorno:

$$\varphi(\pi)=0\Rightarrow\varphi(\pi)=A\pi+B=0\Rightarrow A\pi=-B\Rightarrow A=-\frac{B}{\pi}$$

Luego:

$$\varphi(x)=-\frac{B}{\pi}x+B\Rightarrow\varphi'(x)=-\frac{B}{\pi}$$

Aplicamos la 2ª condición de contorno:

$$\varphi'(0)=0\Rightarrow\varphi'(0)=-\frac{B}{\pi}=0\Rightarrow\boxed{B=0}\ \text{ Luego:}A=-\frac{B}{\pi}=0\Rightarrow A=0$$

Por lo tanto, la única solución posible es la <u>solución trivial</u>.

2) $\boxed{\lambda-1>0}\Leftrightarrow\lambda>1$: En este caso tendremos <u>raíces reales simples distintas</u>: $\begin{cases}r_1=\sqrt{\lambda-1}\\ r_2=-\sqrt{\lambda-1}\end{cases}$

Por lo tanto, la solución será del tipo:

$$\boxed{\varphi(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}}\Rightarrow\varphi(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda-1}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda-1}x}$$

o lo que es lo mismo: $\varphi(x) = A\cosh\left(\sqrt{\lambda - 1}\right)x + B senh\left(\sqrt{\lambda - 1}\right)x$

Aplicando las condiciones de contorno llegamos de nuevo a la solución trivial.

3) $\boxed{\lambda - 1 < 0} \Leftrightarrow \lambda < 1$: En este caso tendremos raíces complejas: $r = \pm i\sqrt{1-\lambda}$

Por lo tanto, la solución será del tipo:

$$\boxed{\varphi(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} sen\beta x} \overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{(r=\alpha\pm i\beta)}}^{\left(\alpha=0,\beta=\sqrt{1-\lambda}\right)} \boxed{\varphi(x) = A\cos\left[\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x\right] + B sen\left[\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x\right]}$$

Así pues: $\varphi'(x) = -A\sqrt{1-\lambda}\, sen\left[\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x\right] + B\sqrt{1-\lambda}\cos\left[\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x\right]$

Aplicamos la 2ª condición de contorno:

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow -A\sqrt{1-\lambda}\, sen\left[\cancelto{0}{\left(\sqrt{1-\lambda}\right)}\, 0\right] + B\sqrt{1-\lambda}\cos\left[\left(\sqrt{1-\lambda}\right)0\right] = 0 \Rightarrow B\sqrt{1-\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

Por lo tanto: $\varphi(x) = A\cos\left[\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x\right]$

Aplicamos la 1ª condición de contorno:

$$\varphi(\pi) = 0 \Rightarrow A\cos\left[\left(\sqrt{1-\lambda}\right)\pi\right] = 0 \Rightarrow \cos\left[\left(\sqrt{1-\lambda}\right)\pi\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\pi}\sqrt{1-\lambda} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\cancel{\pi} \Rightarrow 1 - \lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

Por lo tanto, los autovalores son: $\boxed{\boxed{\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}$ (3)

y sus autofunciones: $\Psi_n(x) = A\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$

Tomamos $A = 1$ para simplificar, luego $\boxed{\boxed{\Psi_n(x) = \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}}$ (4)

b) Para resolver la ecuación integral de Fredholm no homogénea $(g(x) = 1 \neq 0)$ de segunda especie $(h(x) = 1 \neq 0)$, hacemos uso de los autovalores λ_n y de las autofunciones Ψ_n que hemos obtenido en el apartado anterior (para el caso de la ecuación integral homogénea). La solución del problema no homogéneo la obtendremos a partir del desarrollo en serie de autofunciones:

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\langle \Psi_n | g \rangle}{\|\Psi_n\|^2} \Psi_n(x) \quad ; \quad \left(\langle \Psi_n | g \rangle = \int_a^b \Psi_n(y) g(y) dy \right)$$

Así pues:

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\langle \Psi_n | 1 \rangle}{\|\Psi_n\|^2} \Psi_n(x) \qquad (5)$$

Calculamos el producto escalar $\langle \Psi_n | 1 \rangle$ haciendo uso de la ecuación (3):

$$\langle \Psi_n | 1 \rangle = \int_0^{\pi} dx \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] = \left.\frac{sen\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{n+\frac{1}{2}}\right|_0^{\pi} \overset{\left(sen\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=(-1)^n\right)}{=} \boxed{\langle \Psi_n | 1 \rangle = \frac{2}{2n+1}(-1)^n} \qquad (6)$$

Calculamos la norma $\|\Psi_n\|^2$:

$$\|\Psi_n\|^2 = \int_0^{\pi} dx \cos^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Para resolver esta integral hacemos uso de la expresión:

$$\int dx \cos^2 ax = \frac{x}{2} + \frac{sen2ax}{4a} \quad \text{(donde en nuestro caso } a = n + \frac{1}{2} \text{).}$$

Así pues:

$$\|\Psi_n\|^2 = \frac{(2n+1)\pi + sen[(2n+1)\pi]}{4n+2} = \frac{(2n+1)\pi}{4n+2} \Rightarrow \boxed{\|\Psi_n\|^2 = \frac{\pi}{2}}\ ; \qquad (7)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (3), (4), (6) y (7) en la ecuación (5), resulta que la solución de la ecuación integral es:

$$\boxed{\varphi(x) = 1 + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \lambda} \frac{4\cdot(-1)^n}{(2n+1)\cdot\pi} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]} \qquad (8)$$

- ***Si*** λ ***no es igual a un autovalor*** ($\lambda \neq \lambda_n$), la ecuación integral no homogénea *tiene solución* (distinta de la trivial) y vendrá dada por la ecuación (8).

- ***Si*** λ ***es igual a un autovalor*** ($\lambda = \lambda_n$), como $\langle \Psi_n | 1 \rangle = \frac{2(-1)^n}{2n+1} \neq 0$, tendremos que $\frac{\langle \Psi_n | 1 \rangle}{\|\Psi_n\|^2} \neq 0$, y en este caso la ecuación integral no homogénea *no tiene solución.*