# Métodos de la Física Matemática

## Tema 5 – Ecuaciones integrales lineales

### Ejercicio 21

Encuentra la solución de la ecuación integral

$$\boldsymbol{\varphi(x) = 1 + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(x)dy}$$

mediante dos métodos distintos.

## 1º METODO

Derivamos dos veces φ(x) y obtenemos:

$$\varphi'(x) = \sin(x-x) + \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy = \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy$$

$$\varphi''(x) = \cos(x-x)\varphi(x) - \int_1^x \sin(x-y)\varphi(y)dy = \varphi(\mathrm{x}) - \int_1^x \sin(x-y)\varphi(y)dy$$

Por mucho que sigamos derivando siempre nos saldrá una integral de un seno o un coseno. Para resolver la ecuación lo que haremos será sustituir el valor de φ(x), que nos lo dan en el enunciado del problema, en φ´´(x):

$$\varphi''(x) = 1 + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(x)dy - \int_1^x \sin(x-y)\varphi(y)dy = 1$$

Lo siguiente será integrar φ´´(x) hasta obtener φ(x):

φ´´(x) = 1

φ´(x) = x+C

φ(x) = $\frac{x^2}{2}$ +Cx+A

Para conocer la solución de la ecuación debemos antes conocer el valor de las constantes C y A. Para ello, x valdrá 0 y sustituimos en φ(x) y φ´(x):

$$\varphi(0) = 1 + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy = 1$$

$$\varphi'(0) = \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy = 0$$

Entonces:

Daniel Díaz Simón
Borja Valcárcel Gómez

φ(0) = A = 1 ⟹ **A = 1**

φ´(0) =0 + C = 0 ⟹ **C = 0**

La solución de nuestra ecuación quera de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + 1}$$

## 2º METODO

Utilizaremos el método de Laplace para resolver la ecuación del problema, ya que es una ecuación integral de convolución. Según la teoría:

$$\mathcal{L}[k \bullet \varphi] = \mathcal{L}\left[\int_0^x dy\, k(x-y)\, \varphi(y)\right] = \mathcal{L}[k]\, \mathcal{L}[\varphi]$$

Aplicamos la teoría para nuestro caso particular:

$$\mathcal{L}[\varphi(x)] = \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[sin\,(x)]\mathcal{L}[\varphi]$$

Aplicando el operador de la transformada de Laplace nos dará:

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{1}{S} + \frac{1}{S^2+1}\tilde{\varphi}(s)$$

Entonces:

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

Aplicamos la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior y obtenemos la solución a nuestro problema:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + 1}$$

Daniel Díaz Simón
Borja Valcárcel Gómez