OSCILACIONES.-TEMA 3

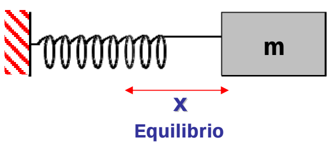
CURSO 2009-2010

Bases Físicas del Medio Ambiente
2° de Ciencias Ambientales
Profesor: Juan Antonio Antequera Barroso

Oscilaciones

Una oscilación ocurre cuando un sistema es <u>perturbado</u> de su posición de equilibrio

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)



En el equilibrio no experimenta ninguna fuerza el objeto por parte del muelle.

LEY DE HOOKE $\boxed{F = -Kx}$

K: constante recuperadora del muelle (N/m)

Condición del movimiento armónico simple

Aplicando la segunda Ley de Newton

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \longrightarrow \boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x}$$

"La aceleración es proporcional al desplazamiento y de dirección negativa"

Oscilaciones

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)

La ecuación general de este tipo de movimiento es:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta) = A sen\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

donde:

x(t): posición del objeto en cualquier instante.- Elongación (m)

A: amplitud del movimiento (m), máximo desplazamiento del equilibrio.

ω: frecuencia angular o pulsación (rad/s).

δ: desfase o fase de oscilación (rad)

3

Oscilaciones

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)

Comprobación de la ecuación anterior al movimiento armónico simple

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= v(t) = -A\omega sen(\omega t + \delta)\\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{dv(t)}{dt} = a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -A\omega^2 x(t)\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

A y δ se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales

$$x(t = 0s) = x_0 = A\cos\delta$$

$$v(t = 0s) = v_0 = -A\omega sen\delta$$

El periodo T es el tiempo en el cual se repite x(t).

$$x(t) = x(t + T) \Rightarrow A\cos[\omega(t + T) + \delta] = A\cos(\omega t + \delta + \omega T)$$

4

Oscilaciones

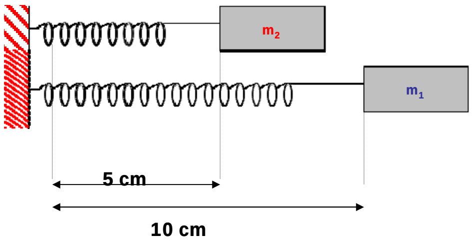
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)

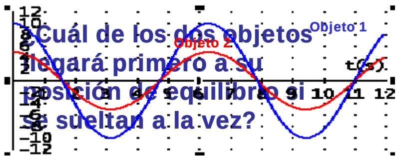
$$\omega T = 2\pi \rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

La frecuencia f es: $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$

$$\left.\begin{matrix} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \end{matrix}\right\} \boxed{\begin{matrix} f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \end{matrix}}$$

Independiente de A





¿Cuál de los dos objetos llegará primero a su posición de equilibrio si se sueltan a la vez?

5

Oscilaciones

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)

Ejemplo: Viajamos en un barco entre las olas. El desplazamiento vertical del barco en las olas viene dado por:

$$y = (1.2m)\cos\left(\frac{t}{2s} + \frac{\pi}{6}\right)$$

a) Encontrar la amplitud, la frecuencia, la pulsación, el periodo, las constante de fase.

b) ¿Dónde se encontrará el barco en el instante t=1 s?

c) Encontrar la velocidad y la aceleración en cualquier instante

d) Encontrar la posición, la velocidad y la aceleración en t=0 s

Ejemplo: Un objeto oscila con una velocidad angular ω= 0.8 rad/s. En el instante t=0 s, el objeto se encuentra en x_0 = 4 cm con una velocidad inicial v_0 = -25 cm/s.

a) Encontrar la amplitud y constante de fase para el movimiento.

b) Escribir x(t)

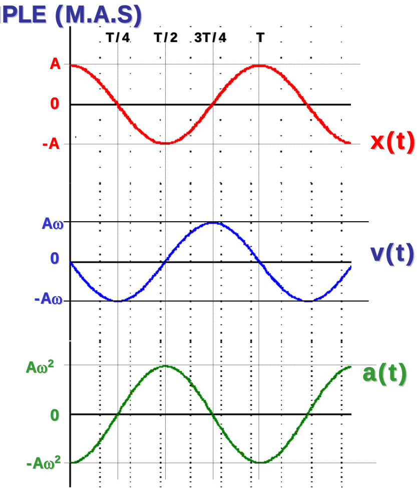
6

Oscilaciones

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)

$$x(t) = A\cos\omega t$$
$$v(t) = -A\omega sen\,\omega t$$
$$a(t) = -A\omega^2 \cos\omega t$$

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$
$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} = \pi$$
$$t = \frac{3T}{4} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$$
$$t = T \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T}T = 2\pi$$

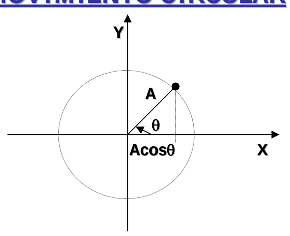


7

Oscilaciones

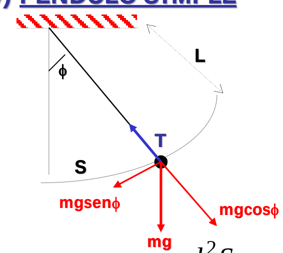
EJEMPLOS DE MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

a) MOVIMIENTO CIRCULAR



$$\theta = \omega t + \delta$$
$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \delta)$$
$$y = Asen\,\theta = Asen(\omega t + \delta)$$

b) PÉNDULO SIMPLE



$$\sum F_t = -mgsen\phi = m\frac{d^2S}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\phi \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

8

Oscilaciones

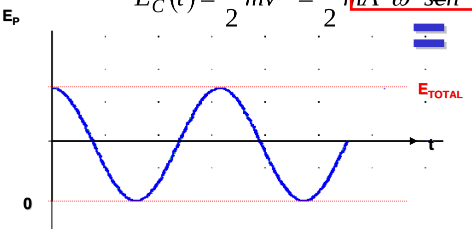
ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

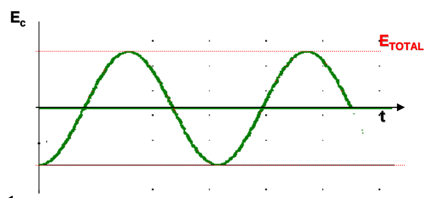
Las energías potencial y cinética del sistema varían con el tiempo, permaneciendo la energía total constante

$$E_P(t)=\frac{1}{2}Kx^2=\frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

$$E_C(t)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t+\delta)=\frac{1}{2}KA^2 sen^2(\omega t+\delta)$$

$$\boxed{E_T=\frac{1}{2}KA^2=cte}$$

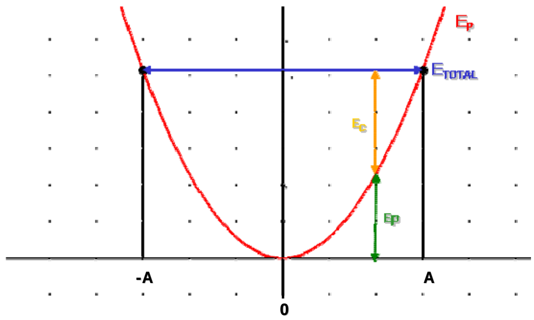




$$E_p(av)=E_C(av)=\frac{1}{2}E_{TOTAL}$$

Oscilaciones

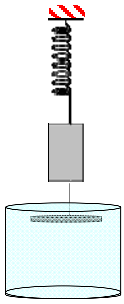
ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

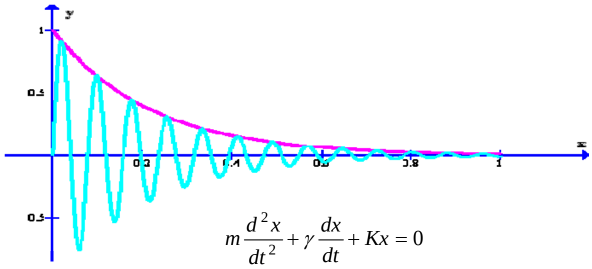


Ejemplo: Un objeto de 3 Kg unido a un muelle oscila con una amplitud de 4 cm y un periodo de 2 s. a) ¿Cuál es la energía total del sistema? b) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? c) ¿En qué posición la velocidad es igual a la mitad del valor máximo?

Oscilaciones

OSCILACIONES AMORTIGUADAS





$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+Kx=0$$

$$\boxed{x(t)=A_0{}^{-\left(\gamma/m\right)t}\cos\left(\omega_a t+\delta\right)=A_0e^{-t/\tau}\cos\left(\omega_a t+\delta\right)}$$

A_0: amplitud inicial

τ: tiempo de relajación o amortiguamiento = $2m/\gamma$

ω_a: frecuencia angular modificada

Oscilaciones

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

$$\omega_a^2=\frac{K}{m}-\frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2}=\frac{K}{m}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{mK}\right)=\omega_0^2\left(1-\frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{mK}\right)=\omega_0^2\left(1-\frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2\omega_0^2}\right)$$

$$\boxed{\omega_a=\omega_0\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4m^2\omega_0^2}}=\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\gamma_C}\right)^2}}$$

γ_C: amortiguación crítica

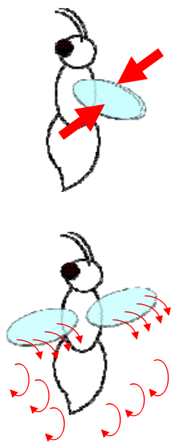
a) $\gamma<\gamma_C \Rightarrow$ Sistema subamortiguado

b) $\gamma=\gamma_C \Rightarrow$ Sistema críticamente amortiguado

c) $\gamma>\gamma_C \Rightarrow$ Sistema sobreamortiguado

Oscilaciones

Ejemplo: Algunos insectos mayores, especialmente dípteros e himenópteros, presentan del orden de 150 movimientos -o más- de las alas por minuto (Esto supone un ritmo superior al cambio de potencial debido a los impulsos nerviosos). Para explicar de modo simplificado este movimiento rápido se supone que las alas actúan como un oscilador débilmente amortiguado, dado por una ecuación del tipo



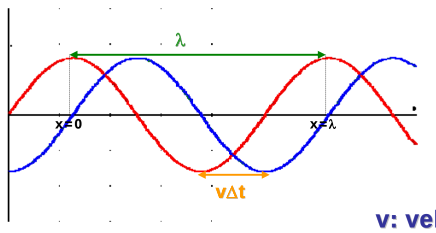
$$m\frac{d^2\theta}{dt^2}+\gamma\frac{d\theta}{dt}+K\theta=0$$

donde θ es el ángulo que forma el ala con la horizontal, m la masa del ala que es del orden de $m=10^{-2}$ g, y γ el coeficiente de rozamiento $\gamma=0{,}4$ gs^{-1} y K la constante elástica $K=1600\pi^2$ gs^{-2}.
a) Dibújese esquemáticamente la solución de la ecuación. Si suponemos que cuando la amplitud de oscilación decrece hasta un valor de 1 / e, se dispara el impulso nervioso que devuelve la amplitud de la oscilación a su valor inicial. b) ¿Cuántos impulsos nerviosos se disparan por minuto, según los datos del problema?

Oscilaciones

PROPAGACIÓN DE ONDAS

Las ondas transportan energía y cantidad de movimiento a través del espacio sin transportar materia.



Ondas Armónicas

v: velocidad de propagación

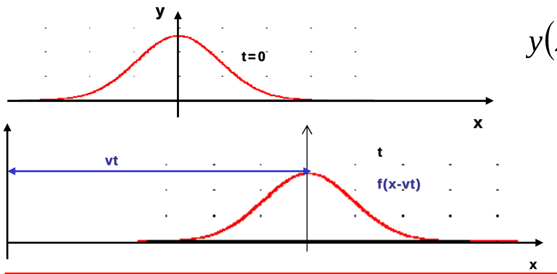
λ: longitud de onda

K: número de onda $\boxed{K=\frac{2\pi}{\lambda}}$

$$\boxed{v=\frac{\lambda}{T}=\lambda f\Rightarrow v=\lambda\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\omega}{K}}$$

Oscilaciones

PROPAGACIÓN DE ONDAS



$$y(x, t=0) = y_0 \cos kx$$

$$y(x', t') = y_0 \cos kx' =$$
$$= y_0 \cos k(x - vt) =$$
$$= y_0 \cos(kx - \omega t) = y(x,t)$$

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) = y_0 \cos(\omega t - kx) = y_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} \rightarrow$$

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx + \omega t)} \leftarrow$$

Oscilaciones

ONDAS TRANSVERSALES Y ONDAS LONGITUDINALES

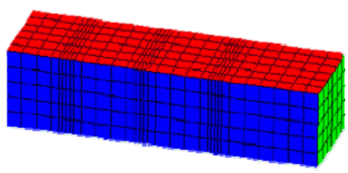
Ondas Transversales: Perturbación perpendicular a la propagación.
Ondas Longitudinales: Perturbación paralela a la propagación.

Ejemplo: Terremoto

Movimiento Sísmico que se propaga a través de ondas elásticas a partir del hipocentro. Distinguimos dos tipos ondas de cuerpo o interiores y ondas superficiales.

Ondas Longitudinales o primarias P:

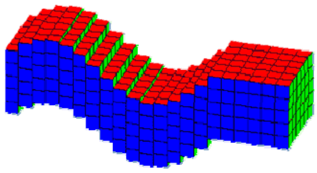
- **v= 8 - 13 Km/s.**
- **Circulan en el interior de la Tierra.**
- **Atraviesa líquidos y sólidos.**
- **Son las primeras en registrarse.**



Oscilaciones

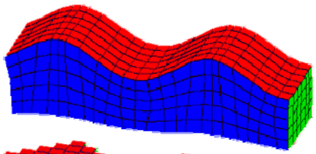
Ondas transversales o secundarias o S:

- v=4 - 8 Km/s
- Atraviesa únicamente sólidos

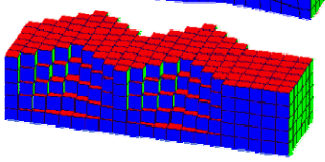


Ondas Superficiales:

- Dos tipos: Rayleigh y Love
- Interacciones entre P y S.
- Son las más dañinas



Rayleigh

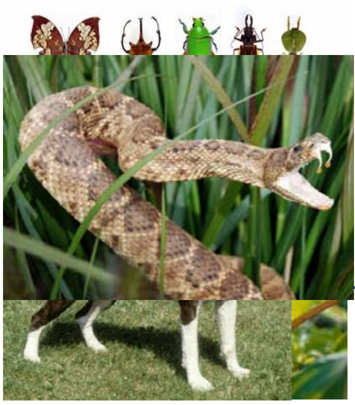


Love

17

Oscilaciones

Comportamiento animal ante un terremoto



... a las ... (China)

Olisquean las emanaciones de gases

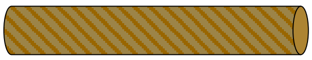
Detectan variaciones campo magnético y perciben el infrasonido

...iben ultrasonidos previos al temblor, 20 ...utos antes que el hombre

18

Oscilaciones

ONDAS TRANSVERSALES Y ONDAS LONGITUDINALES



v: propiedades del medio e independencia del movimiento de la fuente

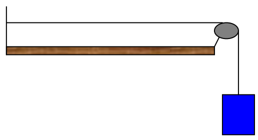
v=f(F,μ)

Para un cuerda $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$

Ondas sonoras en un fluido $v = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$

Ondas sonoras en gas $v = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$ $\gamma(O_2,N_2,H_2)=1{,}4$

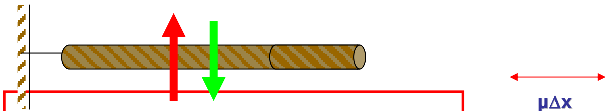
Ejemplo.- La tensión aplicada a una cuerda se obtiene colgando una masa de 3 Kg en uno de sus extremos, como se indica en la figura. La longitud de la cuerda es de 2,5 m y su masa de 50 g. ¿Cuál es la velocidad de las ondas de la cuerda?



19

Oscilaciones

ENERGÍA DE LAS ONDAS DE UNA CUERDA



$$Ec=\frac{1}{2}mv_y^2=\frac{1}{2}(\mu\Delta x)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}(\mu\Delta x)\omega^2A^2sen^2(kx-\omega t)$$

$$E_p=\frac{1}{2}F\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\Delta x=\frac{1}{2}\mu v^2\Delta x A^2k^2sen^2(kx-\omega t)=\frac{1}{2}(\mu\omega^2)A^2\Delta x sen^2(kx-\omega t)$$

$$\Delta E = E_C + E_P = \mu\omega^2\Delta x A^2 sen^2(kx-\omega t) \Rightarrow \Delta E_m = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2\Delta x$$

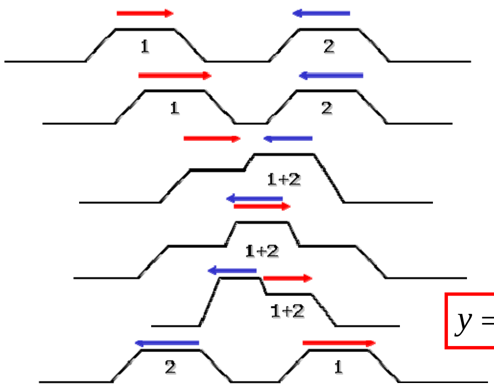
$$P_m = \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2v^2$$

Ejemplo.- Ondas de longitud de onda 35 cm y amplitud 1.2 cm se mueven a lo largo de una cuerda de 15 m que tiene una masa de 80 g y está sometida a una tensión de 12 N. a) Determinar la velocidad y la frecuencia angular de las ondas. b) ¿Cuál es la energía total media de las ondas de la cuerda? c) Calcular la energía total media transmitida por unidad de tiempo a lo largo de la cuerda.

20

Oscilaciones

SUPERPOSICIÓN DE ONDAS.- ONDAS ESTACIONARIAS



Principio de Superposición: Cuando dos o más ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales

$$y_1 = A\cos\left(kx - \omega t + \Phi_1\right)$$

$$y_2 = A\cos\left(kx - \omega t + \Phi_2\right)$$

$$\boxed{y = 2A\cos\left(\delta\Phi\right)\cos\left(kx - \omega t + \Delta\Phi\right)}$$

$$\delta\Phi = \frac{1}{2}\left(\Phi_1 - \Phi_2\right)$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}\left(\Phi_1 + \Phi_2\right)$$

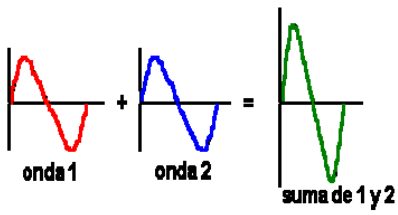
21

Oscilaciones

SUPERPOSICIÓN DE ONDAS.- ONDAS ESTACIONARIAS

- **En Fase**

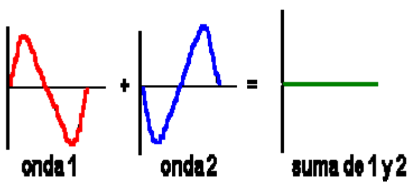
$$\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \delta\Phi = 0 \rightarrow A_n = 2A$$



Interferencia Constructiva

- **En Contrafase o Desfasada 180°**

$$\pi = \Phi_1 - \Phi_2 \Rightarrow \delta\Phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow A_n = 0$$



Interferencia Destructiva

22

Oscilaciones

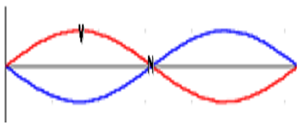
SUPERPOSICIÓN DE ONDAS.- ONDAS ESTACIONARIAS

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\cos(kx-\omega t) \\ y_2 &= A\cos(kx+\omega t) \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{y = 2A\cos(\omega t)\cos(kx)}$$

Onda estacionaria

No se produce propagación ni transmisión de energía. Ambas componentes temporal y espacial están desacopladas.

Ejm.- Una cuerda fija por los extremos



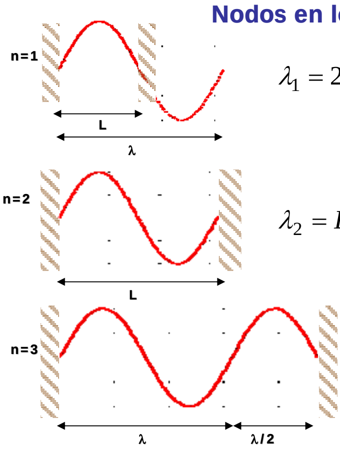
- **Puntos en que kx=0 (ó múltiplos de π) $\Rightarrow$ Oscilación Máxima $\Rightarrow$ VIENTRES**
- **Puntos en que kx= $\pi/2$ (ó múltiplos de $\pi/2$) $\Rightarrow$ No hay Oscilación $\Rightarrow$ NODOS**

23

Oscilaciones

SUPERPOSICIÓN DE ONDAS.- ONDAS ESTACIONARIAS

Nodos en los extremos fijos



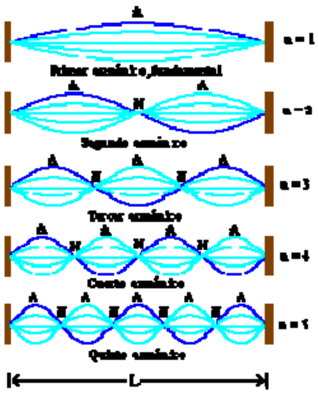
$\lambda_1 = 2L$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2}{n}L}$$

$\lambda_2 = L$

$$\boxed{f_n = nf_1}$$

$\lambda_3 = \dfrac{2}{3}L$

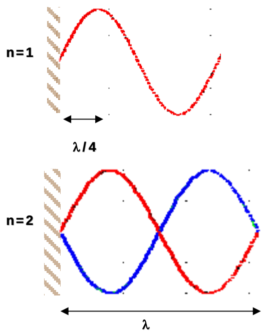


24

Oscilaciones

SUPERPOSICIÓN DE ONDAS.- ONDAS ESTACIONARIAS

Extremo fijo (nodo) y otro móvil (vientre)

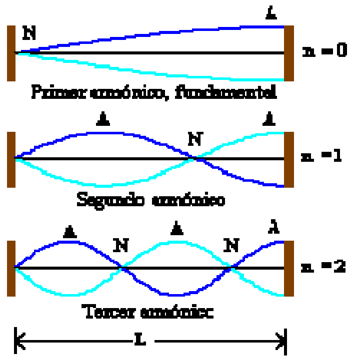


$$\lambda_1 = 4L$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{4}L$$

$$\boxed{f_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right) f_1}$$



Oscilaciones

Ejemplo.- Una cuerda se estira entre dos soportes fijos distantes 0,70 m entre sí y se ajusta la tensión de la cuerda hasta que la frecuencia fundamental de la cuerda es de 440 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales de la cuerda?

Ejemplo.- Una cuerda de 3 m de longitud y densidad másica 0,0025 Kg/m está sujeta por ambos extremos. Una de sus frecuencias de resonancia es 252 Hz. La siguiente frecuencia de resonancia es 336 Hz.

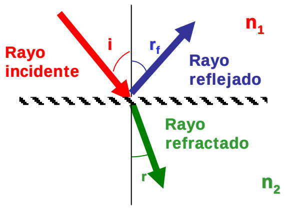
a) ¿Qué armónico corresponde a la frecuencia de 252 Hz?

b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

c) ¿Cuál es la tensión de cuerda?

Oscilaciones

REFLEXIÓN, REFRACCIÓN Y DIFRACCIÓN



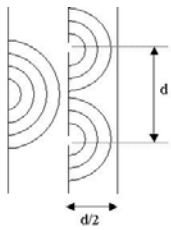
Leyes de Snell

Reflexión: $i = r_f$

Refracción: $n_2 \text{sen } i = n_1 \text{sen } r$

$v_2 \text{sen } i = v_1 \text{sen } r$

Difracción



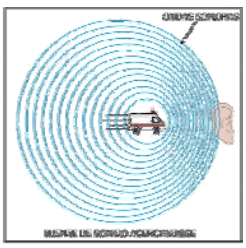
Oscilaciones

EFECTO DOPPLER

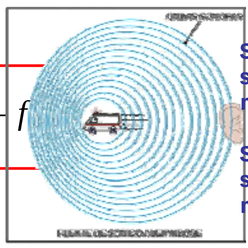
Cuando un foco productor de ondas y un receptor se están moviendo uno con respecto al otro, la frecuencia observada por el receptor no es la emitida por el foco

a) Receptor en reposo y emisor móvil acercándose

b) Receptor en reposo y emisor móvil alejándose



$$f_r = \frac{v}{v - v_e} f_e$$



$$f_r = \frac{v}{v + v_e} f_e$$

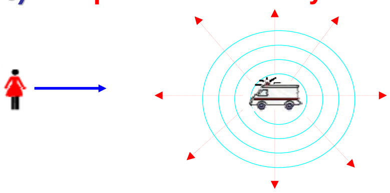
Se acerca: $f_r > f_e$. El sonido recibido es más agudo.

Se aleja: $f_r < f_e$. El sonido recibido es más grave

Oscilaciones

EFECTO DOPPLER

c) Receptor acercándose y emisor en reposo



$$f_r = \frac{v + v_r}{v} f_e$$

R acerca

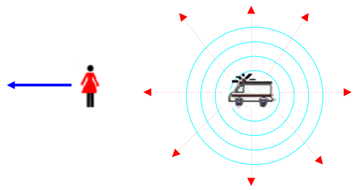
R aleja

$$f_r = \frac{v \pm v_r}{v \mp v_e} f_e$$

E acerca

E aleja

d) Receptor alejándose y emisor en reposo



$$f_r = \frac{v - v_r}{v} f_e$$

29

Oscilaciones

Ejemplo.- Un barco de estudio oceanográficos sitúa un receptor de sonido dentro del agua para captar el sonido de los delfines. Estos emiten frecuencias de 10000 Hz y se mueven a una velocidad de 10 m/s, paralelamente al barco. Hállese la variación de la frecuencia: a) cuando se acercan hacia el barco y b) cuando se alejan ($v_{sonidoagua}$=1500 m/s)

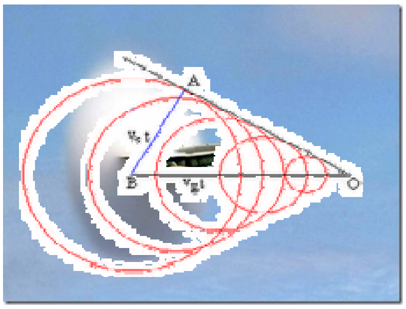
Ejemplo.- Una persona se halla de pie en el andén cuando pasa, haciendo sonar su silbato, un tren rápido circulando a 120 Km/h. ¿Cuál será la variación relativa de la frecuencia cuando se acerca, respecto a cuando se aleja? (v_{sonido}=344 m/s)

Ejemplo.- Un coche se desplaza a una velocidad de 10 m/s hacia una alarma que emite un sonido con una frecuencia de 5000 Hz. a) ¿Qué frecuencia escucha cuando se acerca y b) ¿cuándo se aleja?

30

Oscilaciones

ONDAS DE CHOQUE



$$\boxed{sen\alpha = \frac{v\Delta t}{v_e\Delta t} = \frac{v}{v_e}}$$

$$\boxed{Mach = \frac{v_e}{v}}$$

Ejemplo.- **En el instante t=0, un avión supersónico se encuentra sobre un punto P volando hacia el este a una altura de 15 Km. El estampido sónico se oye en el punto P cuando el avión está a 22 Km al este de dicho punto. ¿Cuál es la velocidad de avión supersónico?**

31