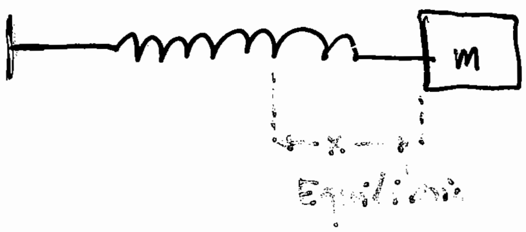
OSCILACIONES

Oscilaciones se presentan cuando un sistema es perturbado de su posición de equilibrio estable

Ejemplos: balanceo de un barco, relojes de péndulo, cuerdas musicales, oscilaciones de moléculas de aire producen sonido, ...

Movimiento armónico simple



Desplazamos x el objeto de su posición de equilibrio, muelle ejerce una fuerza $-kx$ (ley de Hooke)

$$F_x = -kx$$

Fuerza restauradora que se opone al movimiento

$$F_x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \text{MAS}$$

Aceleración proporcional al desplazamiento y dirección opuesta

Periodo: tiempo que tarda en una oscilación completa **T**

Frecuencia $f = \frac{1}{T}$ número de osilaciones por segundo

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta)} \quad (1)$$

A = amplitud (máximo desplazamiento del equilibrio)

ω = frecuencia angular

δ = fase de la osilación (condiciones iniciales)

Notar que $\quad x(t) = A\cos(\omega t+\delta) = A\,\text{sen}(\omega t + \delta + \pi/2)$

$$= A\,\text{sen}(\omega t + \delta')$$

Comprobar que (1) es solución del problema

$$\frac{d}{dt}x(t) = v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t+\delta)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = a = -A\omega^2\cos(\omega t+\delta) = -\omega^2 x$$

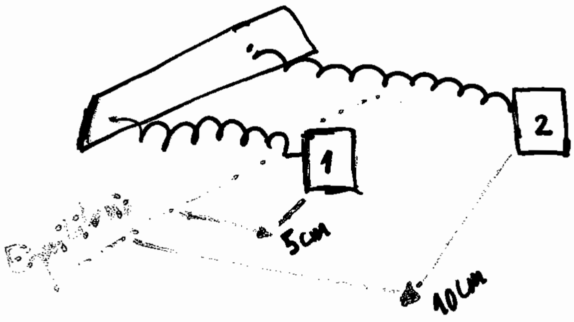
(1) es solución de $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ si

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

(A, δ) se calculan a partir de condiciones iniciales

En $t=0$: $x(0) \equiv x_0 = A\cos\delta$

$$v(0) \equiv v_0 = -A\omega \,\mathrm{sen}\,\delta$$



Masas idénticas atadas a muelles idénticos

¿Cuál de los dos alcanza primero el equilibrio?

T ≡ tiempo que transcurre hasta que $x(t)$ se repite

$$x(t) = x(t+T)$$

$$A\cos(\omega t+\delta) = A\cos[\omega(t+T)+\delta] = A\cos(\omega t+\delta+\omega T)$$

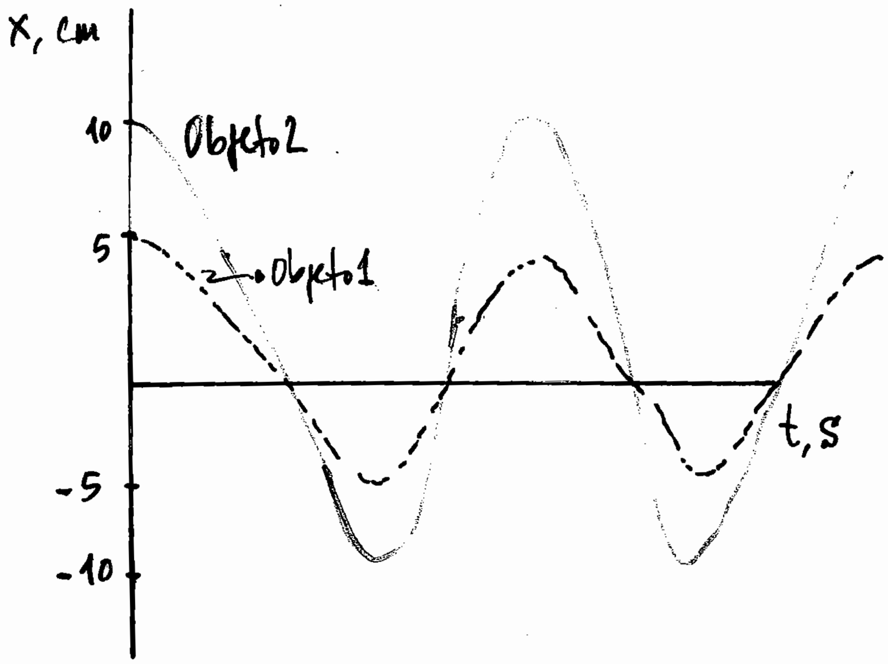
Sabemos que $\cos\alpha = \cos(\alpha+2\pi)$

$$\Downarrow$$

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

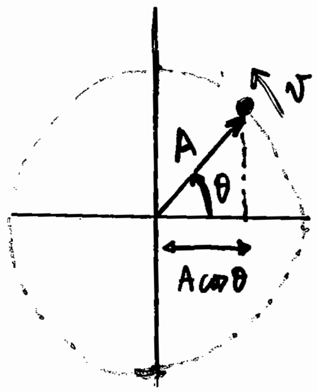
"Periodo en MAS es independiente de la amplitud"



Ejemplos de MAS

a) Movimiento circular

Se mueve a v = cte en círculo de radio A



$$\omega = \frac{v}{A}$$

$$\theta = \omega t + \delta$$

$$x = A\cos\theta$$
$$= A\cos(\omega t + \delta) \quad \text{MAS}$$

Proyección sobre el diámetro: partícula se mueve con MAS

b) Péndulo simple

Cuerda de longitud L donde cuelga masa m

Desde Φ_0 con vertical: empieza a oscilar alrededor de posición vertical con periodo T

Componente tangencial de la fuerza es la responsable de la oscilación

Arco de longitud medido desde el punto más bajo del círculo

$$S = L\Phi$$

$$\sum F_{\text{tangenciales}} = -mg \,\text{sen}\,\Phi = m\frac{d^2 S}{dt^2}$$

$$= mL\frac{d^2\Phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\Phi \approx -\frac{g}{L}\Phi$$ MAS en pequeños desplazamientos angulares

Si Φ es pequeño : $\text{sen}\,\Phi \simeq \Phi$

Si lo reescribimos como $\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\omega^2\Phi$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Ec. movimiento:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Energía del Mov. armónico Simple

$$\text{Energía total} = E_c(t) + E_p(t)$$

$$F = -\frac{d}{dx}E_p = -kx \longrightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

Energía cinética: $E_c(t) = \frac{1}{2}m\,v^2(t)$

$$v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t+\delta)$$

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\,\text{sen}^2(\omega t+\delta) \underset{\omega^2 = k/m}{=} \frac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t+\delta)$$

$$E_{total} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta) + \frac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t+\delta)$$

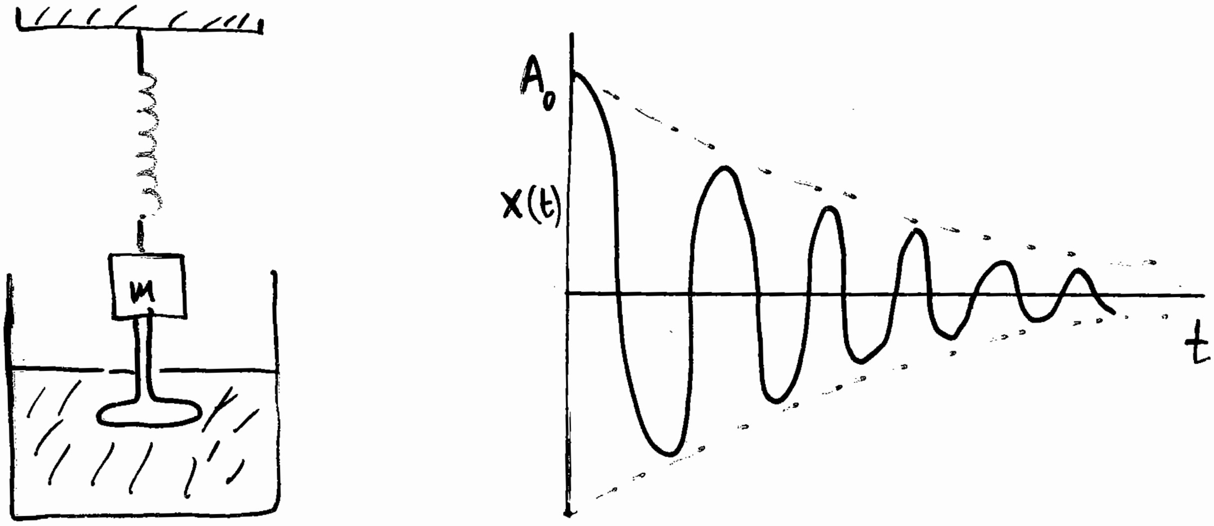
$$= \frac{1}{2}kA^2\left[\cos^2(\omega t+\delta) + \text{sen}^2(\omega t+\delta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \equiv \text{constante}$$

"Energía total en MAS es proporcional al cuadrado de la amplitud"

Oscilaciones amortiguadas

Efectos de frenado (resistencia del aire, fricción piezas mecánicas, ...) : Oscilaciones amortiguadas



Amplitud y energía disminuyen en el tiempo. Aparece fuerza que se opone al movimiento. Dicha fuerza se puede representar como

$$-\gamma \frac{dx}{dt} \qquad \gamma \equiv \text{constante}$$

Fuerza produce trabajo negativo sobre sistema

Ley de Newton : $$F = -\left(kx + \gamma \frac{dx}{dt}\right) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\gamma \frac{dx}{dt}}_{\text{fricción}} + \underbrace{kx}_{\text{fuerza elástica}} = 0}$$

$$x(t) = A_0 \, e^{-t/\tau} \cos(\omega_a t + \delta)$$

$$\tau = \frac{2m}{\gamma}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2}$$

$A_0 \equiv$ amplitud inicial

$\tau \equiv$ tiempo de relajación o amortiguamiento

$\omega_a \equiv$ frecuencia angular modificada

Si $\gamma = 0$, $\tau \to \infty$, recuperamos MAS

Definimos $\omega_0^2 \equiv k/m$

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{mk}\right)$$

$$= \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2\omega_0^2}\right)$$

$$\boxed{\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2} \qquad \gamma_c = 2m\omega_0}$$

$\gamma_c \equiv$ valor crítico

Si $\gamma > \gamma_c$, ω_a (??), el sistema NO oscila (sobreamortiguado)

Si $\gamma = \gamma_c$, $\omega_a = 0$, sistema vuelve al equilibrio sin prácticamente oscilar

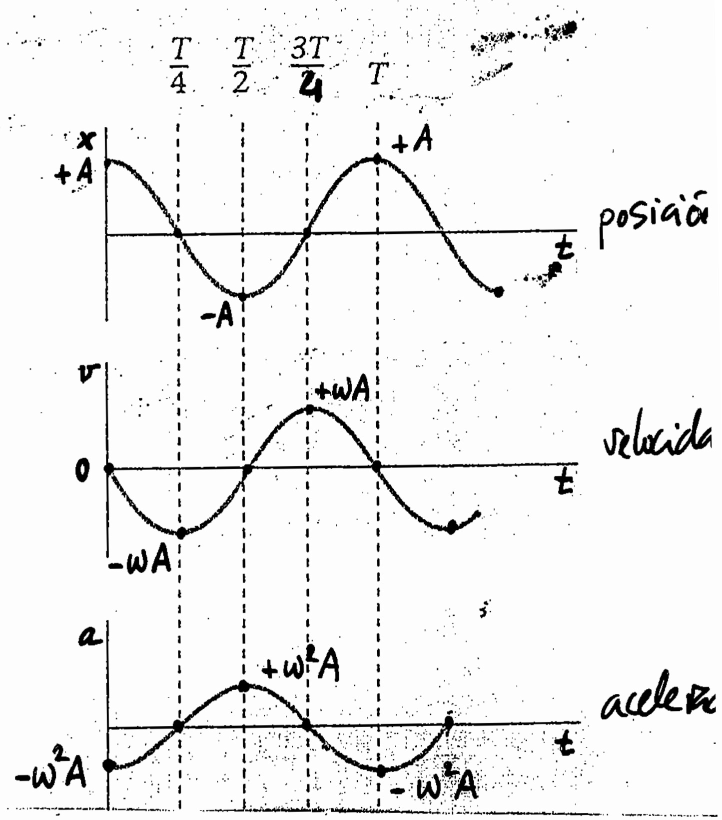
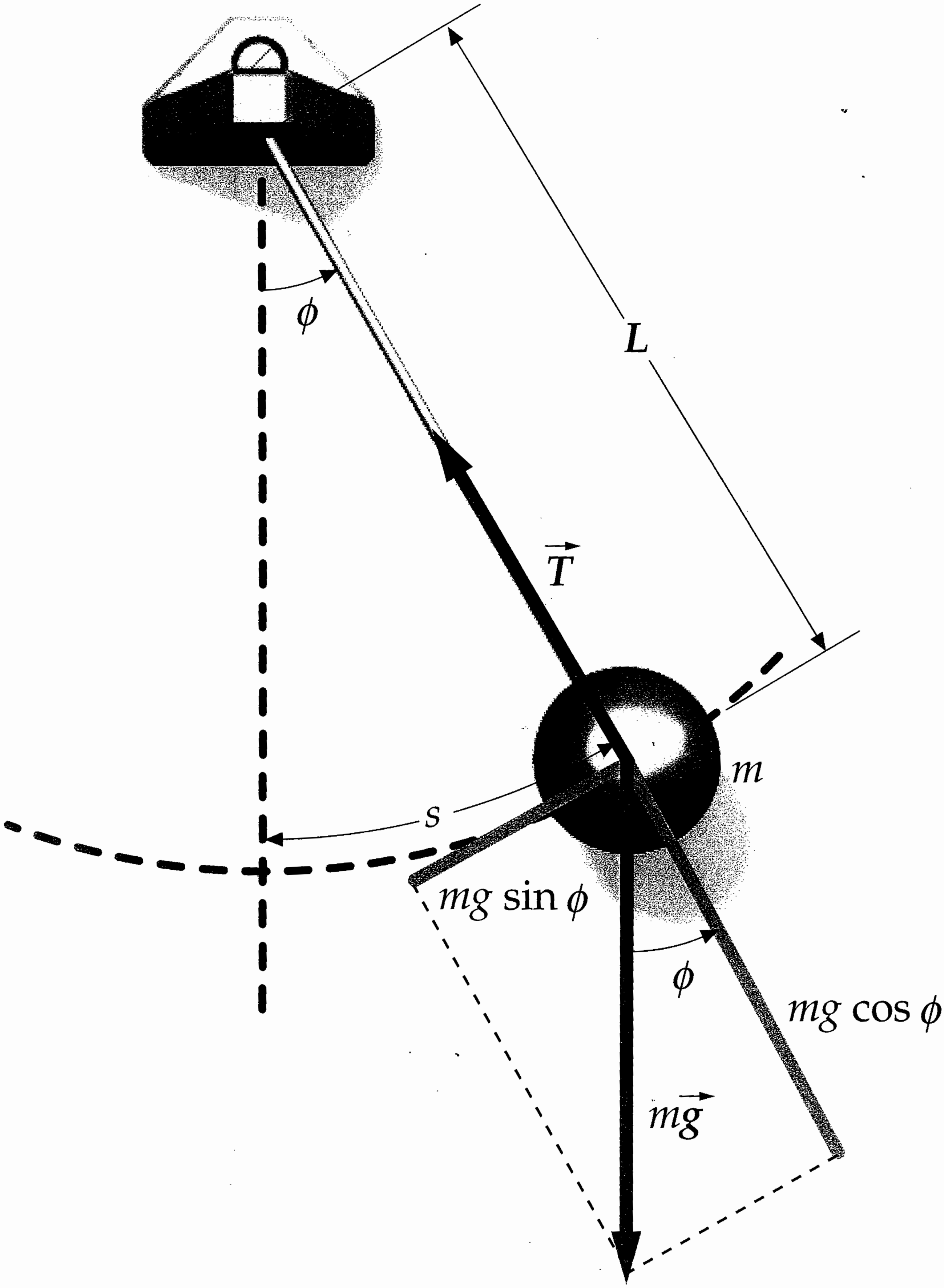


Figura 14.5 Gráficos de x, v y a en función del tiempo t para $\delta = 0$. En $t = 0$, el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración es negativa e igual a $-\omega^2 A$. La velocidad se hace negativa cuando el objeto se mueve hacia atrás buscando su posición de equilibrio. Después de un cuarto de período ($t = T/4$), el objeto está en equilibrio, $x = 0$, $a = 0$ y la velocidad alcanza su valor máximo ωA. En $t = T/2$, del desplazamiento es $-A$, la velocidad es de nuevo cero y la aceleración $+\omega^2 A$. En $t = 3T/4$, $x = 0$, $a = 0$ y $v = +\omega A$.

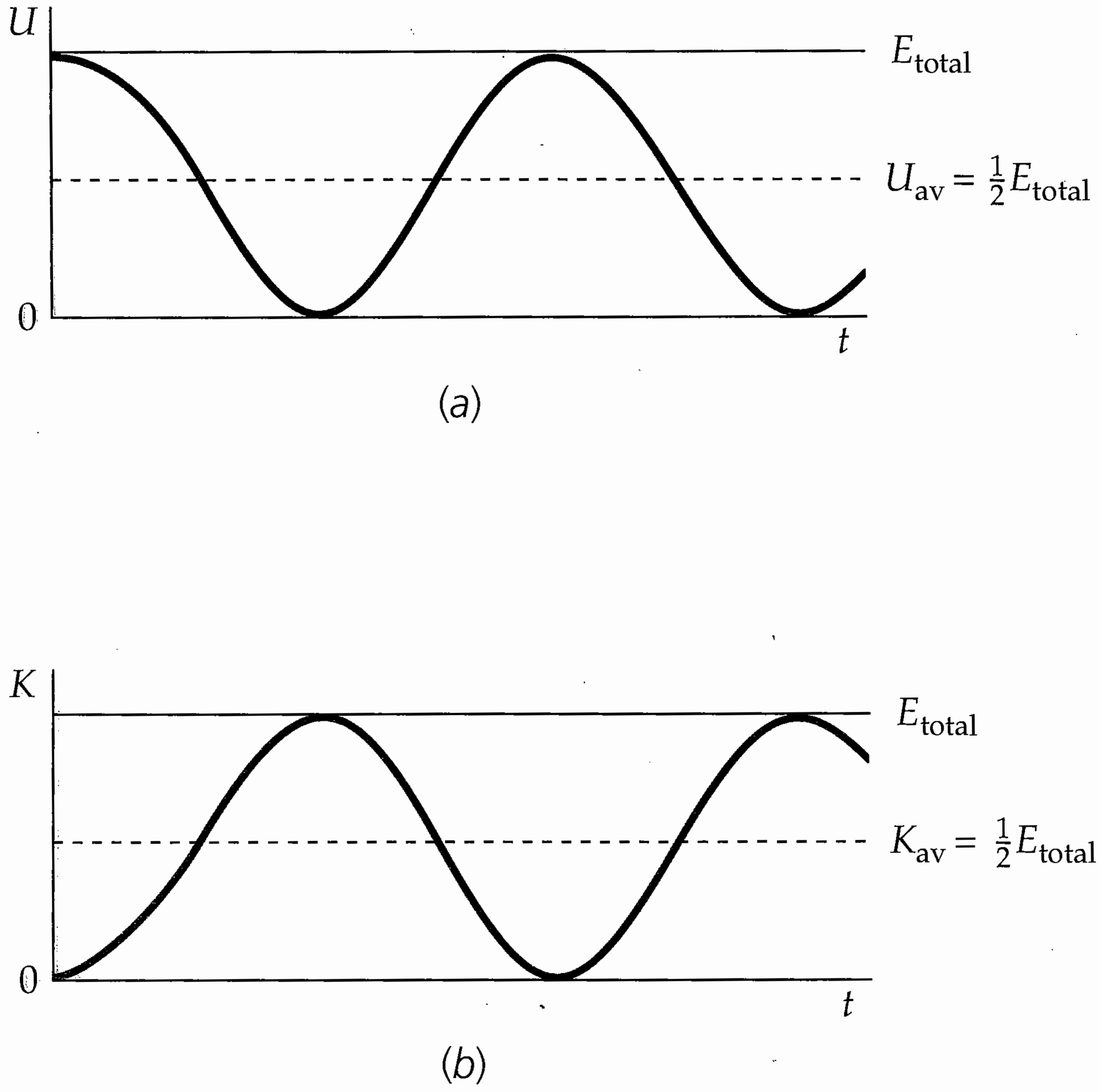
Transparency 57
Figure 14-14, page 416
Forces on a simple pendulum

Tipler: **Physics for Scientists and Engineers**
Fourth Edition, Volume 1



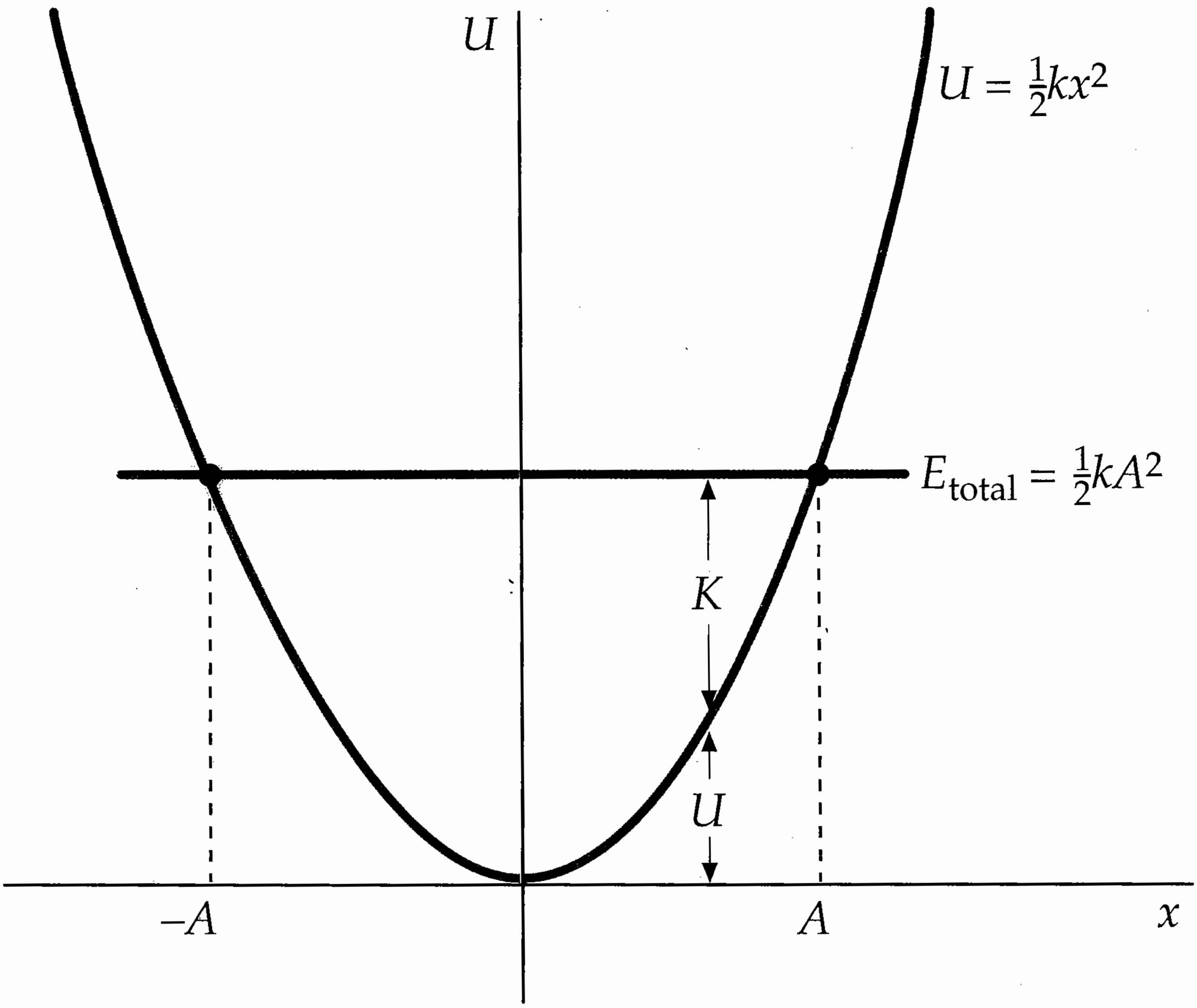
Transparency 54
Figure 14-8, page 410
Potential and kinetic energy of an object in simple harmonic motion

Tipler: **Physics for Scientists and Engineers**
Fourth Edition, Volume 1



Transparency 55
Figure 14-9, page 411
Potential energy function, total energy, and kinetic energy E for a mass on a spring

Tipler: **Physics for Scientists and Engineers**
Fourth Edition, Volume 1



ONDAS. PROPAGACIÓN DE ONDAS

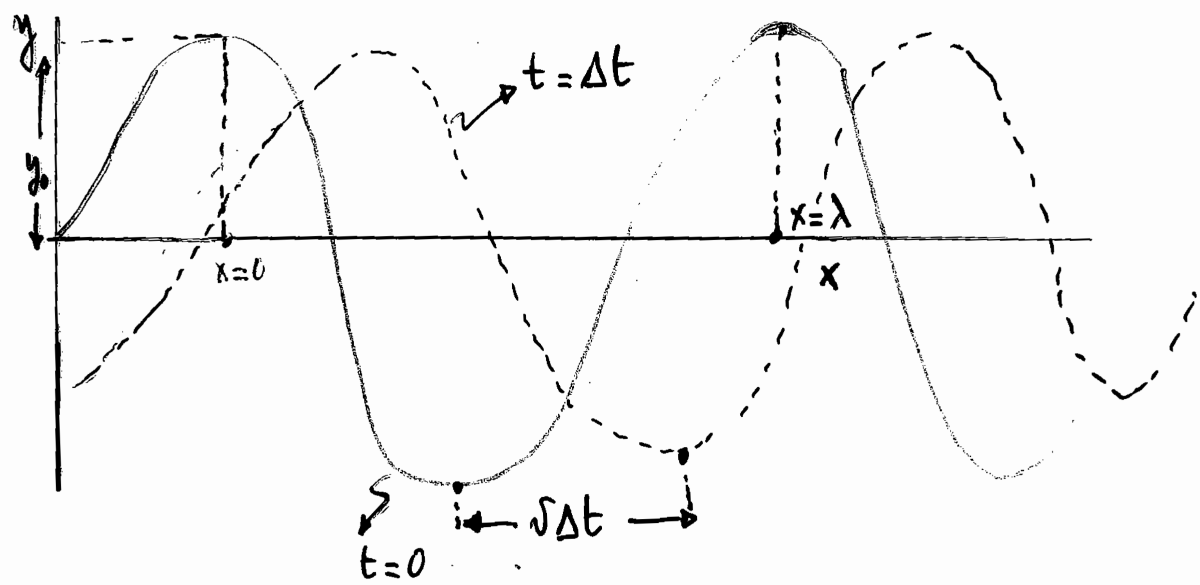
Transporte de energía, sin transporte de masa

Diferencia entre osilación y onda: onda es una perturbación (variación de energía) que se propaga

Ejemplos: propagación del "golpe" de látigo en una cuerda, ondas en la superficie de estanque, ...

Describir movimientos osilatorios: sinusoides

Consideremos una cuerda en dos instantes sucesivos



Forma de la oscilación varía en el tiempo t. Además hay un desplazamiento en la dirección x

Osilaciones temporales: periodo de tiempo en que una osilación tarda en repetirse

Onda sinusoidal: se repite también en el espacio

Longitud de onda λ: distancia mínima a la cual la onda se repite

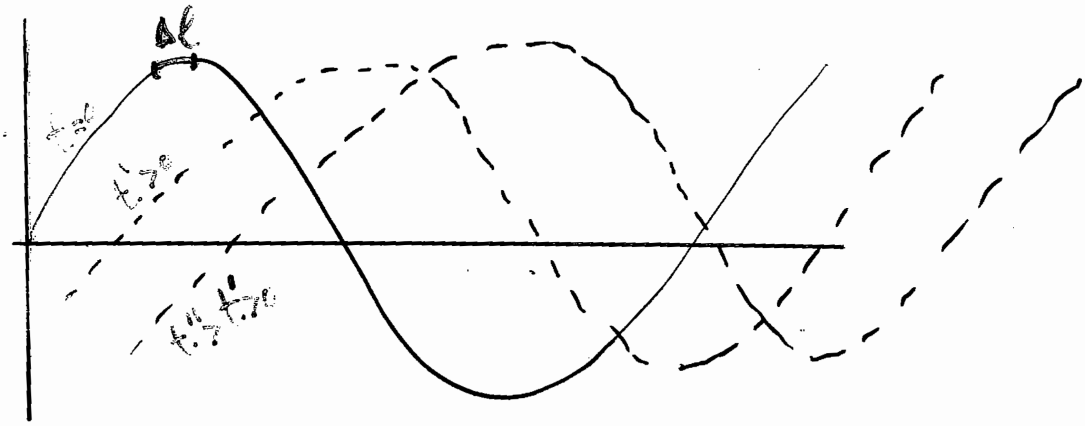
$$t=0: \; y(x, t=0) = y_0 \cos kx$$

k se determina a partir de que la onda presenta un máximo en $x=0$ y el siguiente en $x=\lambda$:

$$\cos k\lambda = 1 \Rightarrow k\lambda = 2\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$k \equiv$ número de onda

¿Cuál es la relación de k y λ con el periodo (frecuencia) de la onda?



Velocidad de propagación v: velocidad con la que se mueve la perturbación

Supongamos $v \equiv$ cte

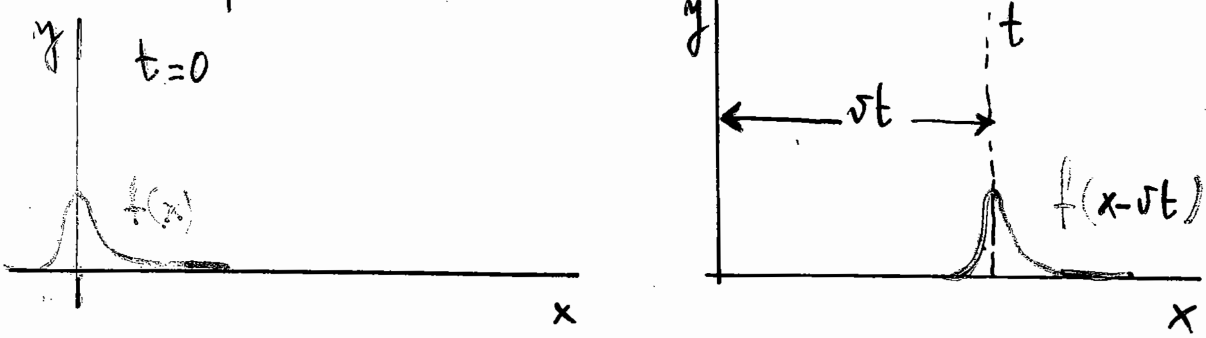
Trozo de cuerda Al volverá a su posición inicial después de un tiempo = periodo T

En ese tiempo la onda ha realizado una oscilación completa: espacio recorrido es λ

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}}$$

Ecuación de la onda

Forma en que la onda se propaga en la cuerda



Sistema de referencia inercial que se mueve a la velocidad v de la onda. En ese sistema de referencia la forma de la onda no cambia, ya que la onda no se propaga. Sólo existe oscilación temporal

$$t = 0 : \quad y(x,0) = y_0 \cos kx$$

Sistema de referencia móvil, ligado a la onda

$$y'(x',t) = y'_0 \cos kx'$$

Relación entre los dos observadores:

$$y = y'$$
$$x = x' + vt$$

$$y'(x',t) = y_0 \cos k(x') = y_0 \cos k(x - vt)$$
$$= y_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx \mp \omega t)}$$

(−) : ondas viajeras hacia la derecha
(+) : ondas viajeras hacia la izquierda

Ondas transversales y longitudinales

Onda transversal : onda produce oscilación en las partículas del medio en el que se propaga perpendicular a la dirección de propagación
Ejemplo: cuerda elástica. Onda se propaga de izqda a derecha y el elemento de cuerda Δl se mueve arriba y abajo

Onda longitudinal : Oscilación en el medio se da en la misma dirección de propagación
Ejemplo: Ondas sobre muelle sujeto por dos extremos

Onda transversal elástica

Relacionar propiedades de la onda con parámetros elásticos de la cuerda

Tensión F_t

Densidad lineal de masa $\mu = M/L$

Análisis dimensional

Velocidad de la onda $v \equiv cte$

$$v = f(F_t, \mu) \sim F_t^{a} \mu^{b}$$

Homogeneidad en las dimensiones de la ecuación

$$\left.\begin{array}{l} [v] = LT^{-1} \\ [F_t] = MLT^{-2} \\ [\mu] = ML^{-1} \end{array}\right\} \quad LT^{-1} = (MLT^{-2})^{a} (ML^{-1})^{b}$$

$$\begin{array}{l} 0 = a+b \\ 1 = a-b \\ -1 = -2a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = +\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$v = C\sqrt{F_t/\mu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}}}$$

$$C = 1$$

Ondas sonoras en gas : $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

$\gamma \equiv$ cte depende del gas

$M \equiv$ Masa molar gas

Superposición de ondas. Ondas estacionarias

Superposición de ondas armónicas en cuerda elástica

$$y_1 = A \cos(kx - \omega t + \Phi_1)$$

$$y_2 = A \cos(kx - \omega t + \Phi_2)$$

Difieren en la fase. Supongamos que se superponen en un punto

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\cos(kx - \omega t + \Phi_1) + \cos(kx - \omega t + \Phi_2)\right]$$

$$= \left[2A\cos(\delta\Phi)\right]\cos(kx - \omega t + \Delta\Phi)$$

donde

$$\delta\Phi \equiv \tfrac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$\Delta\Phi \equiv \tfrac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$$

Superposición de dos ondas armónicas es una onda armónica con amplitud y fase modificadas

casos extremos: a) Ambas ondas en fase: $\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \delta\Phi = 0$

$A \rightarrow 2A$: superposición constructiva

b) Ambas ondas en contrafase: $\Phi_1 - \Phi_2 = \pi \Rightarrow \delta\Phi = \pi/2$

$y = 0$: superposición destructiva

Supongamos dos ondas en fase con direcciones de propagación opuestas:

$$y_1 = A\cos(kx-\omega t)$$

$$y_2 = A\cos(-kx-\omega t) = A\cos(kx+\omega t)$$

$$\boxed{y = y_1+y_2 = 2A\cos(\omega t)\cos(kx)}$$

Componentes espacial y temporal de la ondan están desacopladas. Movto oscilatorio sin propagarse: onda estacionaria

Al no haber propagación, no se transmite energía
Ejemplo: propagación en una cuerda con extremos fijos

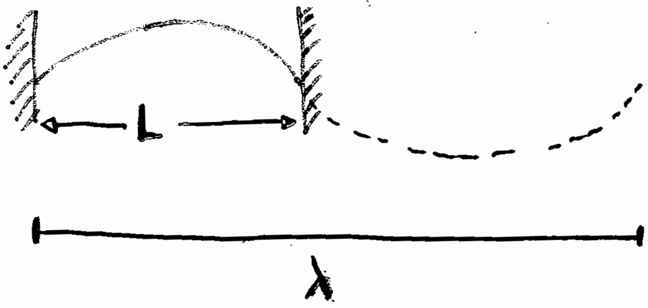
Puntos en que $kx=0$ (ó múltiplos de π): Oscilación máxima (Vientres)

Puntos en que $kx = \frac{\pi}{2}$ (o múltiplos de $\frac{\pi}{2}$): No hay oscilación (Nodos)

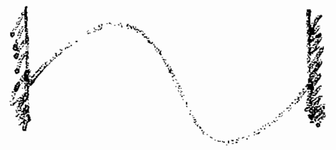
Ejemplo de cuerda elástica con extremos fijos: Al llegar la onda al extremo se refleja. Onda reflejada está en fase con incidente y de dirección opuesta de propagación: Onda estacionaria

a) Cuerdas de instrumento musical

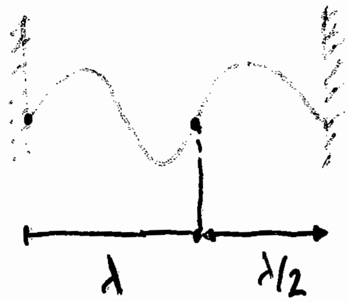
Nodos en extremos fijos

n=1 

$\lambda_1 = 2L$

n=2 

$\lambda_2 = L \ , \quad \lambda_2 = \frac{2}{2} L$

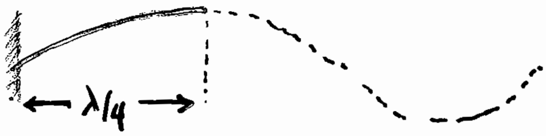
n=3 

$L = \lambda_3 + \frac{\lambda_3}{2} = \frac{3}{2}\lambda_3 \ , \quad \lambda_3 = \frac{2}{3} L$

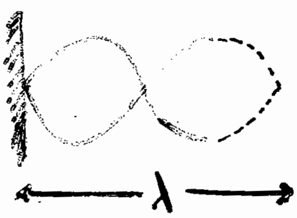
$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

b) Extremo fijo y otro móvil

Extremo fijo : nodo   Extremo móvil : vientre

n=1 

$\lambda_1 = 4L$

n=2 

$\frac{3}{4}\lambda_2 = L \ , \quad \lambda_2 = \frac{4}{3} L \ ,$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}$$

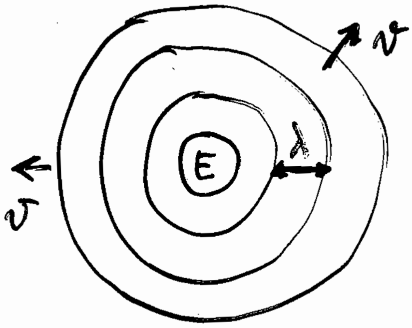
Efecto Doppler

Ondas sufren alteraciones debido al modo en que son recibidas o bien porque el emisor se mueve.

Ejemplo: suena distinto el sonido del tren según se acerca o se aleja → Efecto Doppler

a) Receptor móvil

$R_e \rightarrow v_r$



$v \equiv$ velocidad de propagación de la onda en el medio

Receptor ve acercarse las ondas a $v' = v + v_r$
pero sin notar variación en su longitud de onda λ

$$f_r = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_r}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{v}{f_e} \rightarrow \boxed{f_r = \frac{v + v_r}{v} f_e = \left(1 + \frac{v_r}{v}\right) f_e}$$

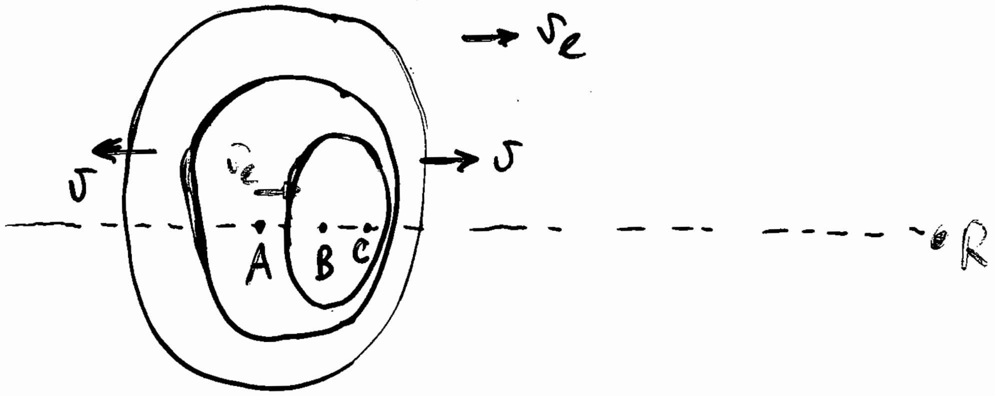
(receptor moviéndose hacia fuente)

$$\boxed{f_r = \left(1 \pm \frac{v_r}{v}\right) f_e}$$

+ receptor se acerca
− receptor se aleja

b) Emisor móvil

Receptor en reposo y el emisor se mueve hacia él.



Longitud de onda se notará distinta según la dirección en que la "observamos"

Entre A y B, el emisor se ha desplazado. La onda se emite en posición distinta

T_e: periodo de las ondas

Emisor acercándose a R quieto

$$A \longleftrightarrow B \quad v_e T_e$$

$$\lambda_r = \lambda_e - v_e T_e$$

En la dirección opuesta $\lambda_r = \lambda_e + v_e T_e$

Por delante del frente de onda, las ondas se comprimen mientras que por detrás, las ondas están más expandidas!

$$\lambda_r = \lambda_e - \frac{v_e}{f_e} \rightarrow \frac{v}{f_r} = \frac{v}{f_e} - \frac{v_e}{f_e} = \frac{1}{f_e}(v - v_e)$$

$$\boxed{f_r = \frac{v}{v - v_e} f_e}$$

$$\boxed{f_r = \frac{v}{v \mp v_e} f_e}$$

$\left(\begin{array}{l} - \text{ emisor acercándose} \\ + \text{ emisor alejándose} \end{array} \right)$

ii) Caso General

$$\boxed{f_r = \frac{v \pm v_r}{v \mp v_e} f_e}$$

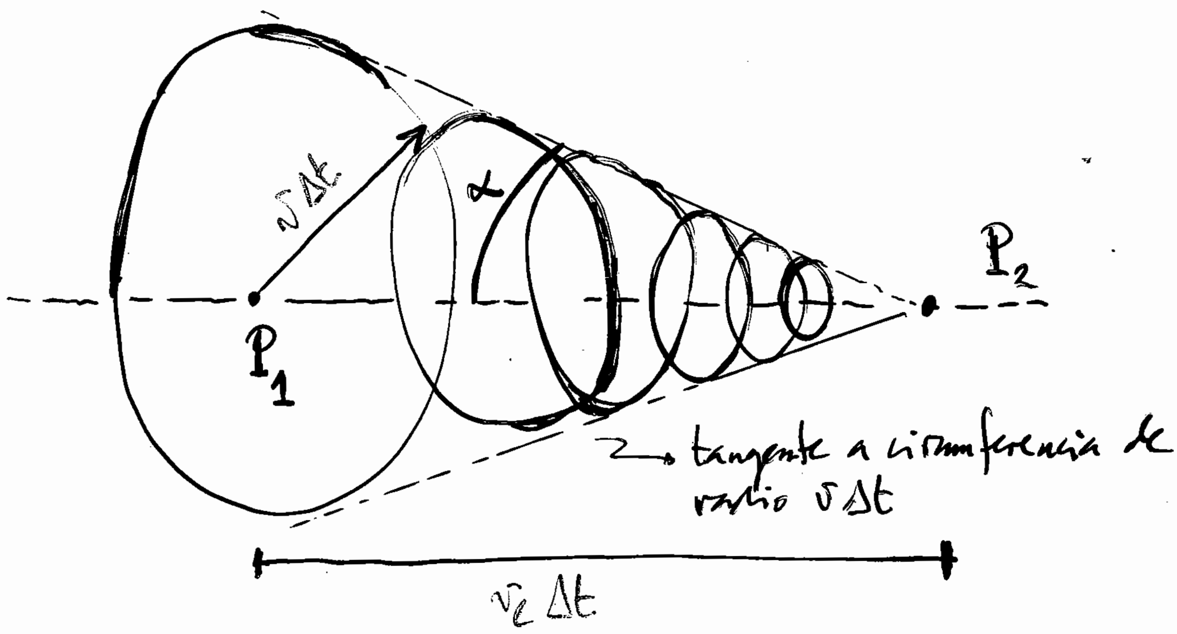
+ R se acerca
− R se aleja

− E se acerca
+ E se aleja

Ondas de choque

En las expresiones anteriores se ha supuesto que (v_e, v_r) son más pequeñas que la velocidad del frente de onda v en el medio

Si emisor se mueve superando la velocidad del sonido en el medio ($v_e > v$), las ondas se apelotonan detrás del emisor



En P_1 se emite onda esférica. Transcurrido Δt su frente de onda recorre distancia $v\Delta t$

En el mismo Δt, emisor avanza hasta P_2. Distancia entre P_1 y P_2: $v_e \Delta t$

Como $v_e > v$ no hay frente de ondas por delante de la fuente emisora y las ondas se apilan detrás de la fuente: onda de choque

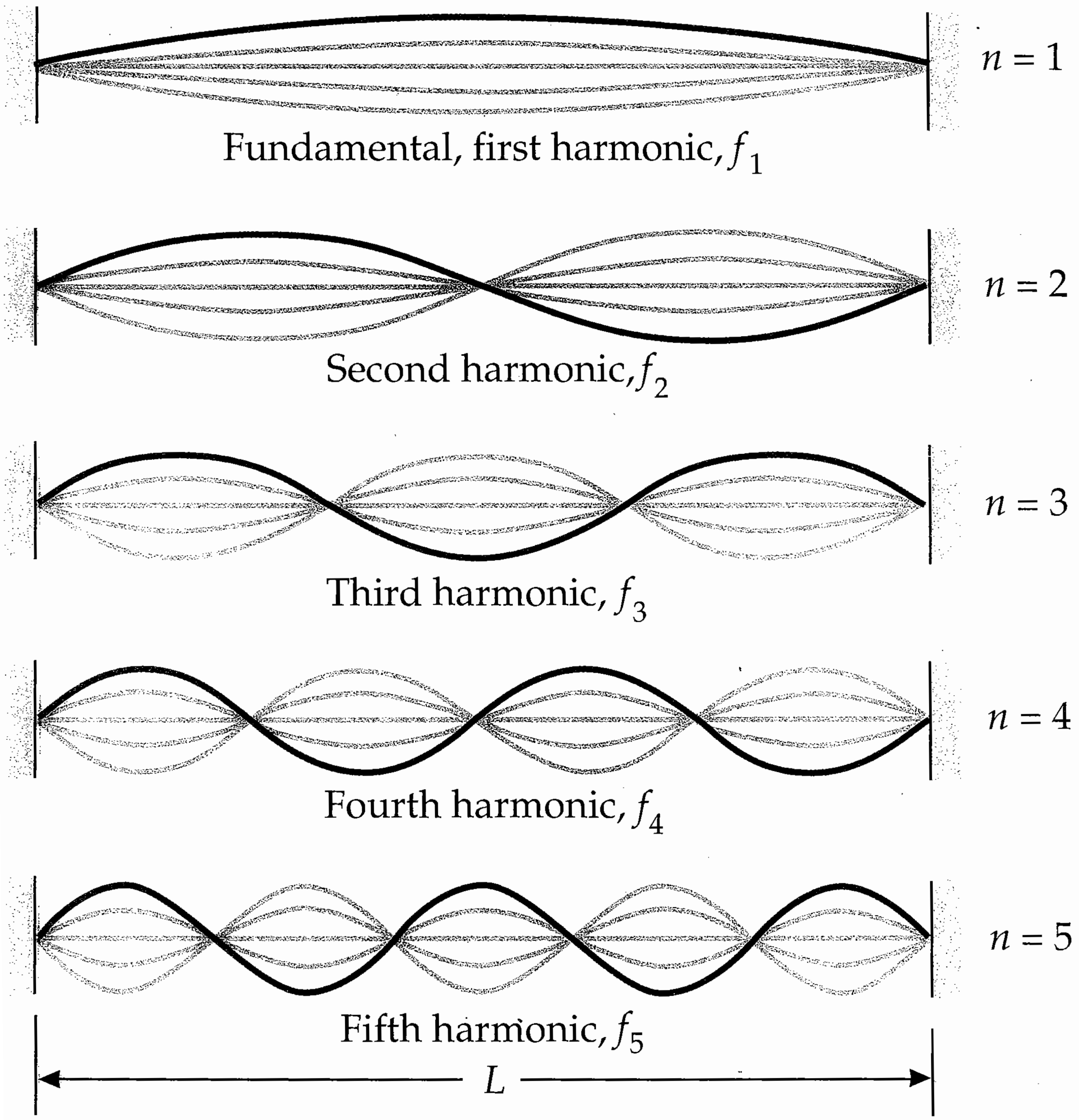
En el caso del sonido: "estruendo" al llegar al receptor. Ondas quedan encerradas en un cono de anchura determinada por α

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v\,\Delta t}{v_e \Delta t} = \frac{v}{v_e} = M^{-1}$$

Número de Mach: $M = \dfrac{v_e}{v}$

Figure 17-11, page 524
Standing waves on a string fixed at both ends

Tipler: **Physics for Scientists and Engineers**
Fourth Edition, Volume 1



Transparency 65

Figure 16-11, page 488; Figure 16-15, page 492

Standing waves on a string fixed at both ends (*left*) and on a string fixed at one end (*right*)

Tipler: **Physics for Scientists and Engineers**
Fourth Edition, Volume 1