Sonia Fernández Moreno,
Carmen Fernández Serrano,
Juan García de la Concepción-> Problema 12.

Una máquina de Atwood posee dos bloques de masas *m*1 y *m*2 (*m*1 > *m*2) conectados por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea que carece de rozamiento. La polea es un disco uniforme de masa *M* y radio *R*. La cuerda no desliza por la polea.

Determinar la aceleración angular de la polea así como la aceleración lineal de los dos bloques aplicando la segunda ley de Newton para la rotación.

Como m1 es mayor que m2, el disco girará en sentido contrario a las agujas del reloj.

Segunda ley de Newton para la rotación:

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$$

El momento externo total es la suma de los momentos ejercidos por las fuerzas externas.

$$\sum \tau_{ext} = \tau 1 + \tau 2$$

Los brazos de palancas F1 y F2 coinciden con R (ambos brazos de palanca).

Entonces:

F1=m1.g
F2=m2.g

Sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene que:

$$\sum \tau_{ext} = m1gR - m2gR$$

El momento angular total es igual al momento angular de la polea más el momento angular de cada bloque. La polea tiene momento angular de espín y cada bloque tiene momento angular orbital.

$$L = L_p + L_1 + L_2 = I\omega + m1vR + m2vR$$

Se sustituyen estos resultados en la ecuación de la segunda ley de Newton para la rotación y se obtiene:

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$$

$$m1gR - m2gR = \frac{d}{dt}(I\omega + m1vR + m2vR)$$

$m1gR - m2gR = I\alpha + (m1 + m2)R.a$ (Derivada de la expresión de arriba)

Sustituyendo $I = \frac{1}{2}MR^2$ y $\alpha = \frac{a}{R}$, se llega a:

$$m1gR - m2gR = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} + (m1 + m2)R.a$$

$$a = \frac{(m1 - m2)g}{\frac{1}{2}M + m1 + m2}$$

$$\alpha = \frac{(m1 - m2)g}{(\frac{1}{2}M + m1 + m2).R}$$

SEGUNDA FORMA:

$$m1 \Rightarrow \sum F = m1a$$
$$T1 = m1g - m1a$$

$$m2 \Rightarrow \sum F = m2a$$
$$T2 = m2a + m2g$$

$$\tau = FR$$
$$I\alpha = (T1 - T2)R$$
$$\tau = I\alpha$$

$$T1 - T2 = m1g - m1a - m2a - m2g$$
$$a = \alpha.R$$
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I\alpha = (m1g - m1a - m2a - m2g)R$$
$$I\alpha = m1gR - m1aR - m2aR - m2gR$$
$$1/2MR^2\alpha = m1gR - m1aR - m2aR - m2gR$$
$$1/2MR^2\alpha + m1\alpha R^2 + m2\alpha R^2 = m1gR - m2gR$$
$$\alpha(1/2MR^2 + m1R^2 + m2R^2) = m1gR - m2gR$$

$$\alpha = \frac{m1gR - m2gR}{1/2MR^2 + m1R^2 + m2R^2}$$

$$\alpha = \frac{g(m1 - m2)}{R(1/2M + m1 + m2)}$$

Como $a = \alpha R$

$$a = \frac{g(m1 - m2)}{1/2M + m1 + m2}$$