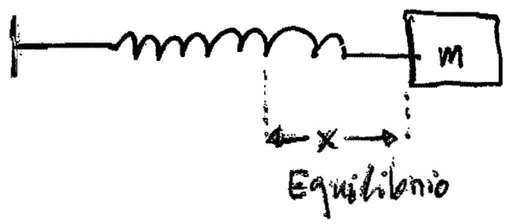
OSCILACIONES

Oscilaciones se presentan cuando un sistema es perturbado de su posición de equilibrio estable

Ejemplos: balanceo de un barco, relojes de péndulo, cuerdas musicales, oscilaciones de moléculas de aire producen sonido, ...

Movimiento armónico simple



Desplazamos x el objeto de su posición de equilibrio, muelle ejerce una fuerza $-kx$ (ley de Hooke)

$$F_x = -kx$$

Fuerza restauradora que se opone al movimiento

$$F_x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \text{MAS}$$

Aceleración proporcional al desplazamiento y dirección opuesta

Periodo: tiempo que tarda en una oscilación completa T

Frecuencia: $f = \frac{1}{T}$ número de oscilaciones por segundo

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta)} \quad (1)$$

$A \equiv$ amplitud (máximo desplazamiento del equilibrio)

$\omega \equiv$ frecuencia angular

$\delta \equiv$ fase de la oscilación (condiciones iniciales)

Notar que $x(t) = A\cos(\omega t+\delta) = A\,\text{sen}(\omega t + \delta + \pi/2)$

$$= A\,\text{sen}(\omega t + \delta')$$

Comprobar que (1) es solución del problema

$$\frac{d}{dt}x(t) = v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = a = -A\omega^2\cos(\omega t+\delta) = -\omega^2 x$$

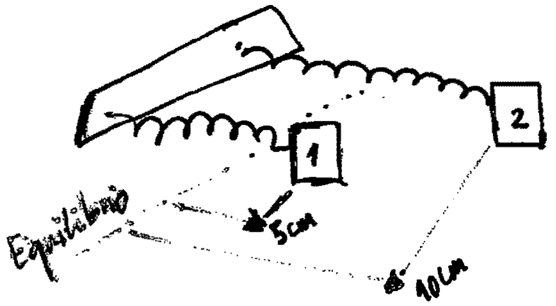
(1) es solución de $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ si

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

(A, δ) se calculan a partir de condiciones iniciales

En $t=0$: $\quad x(0) \equiv x_0 = A\cos\delta$

$$v(0) \equiv v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\delta$$



Masas idénticas atadas a muelles idénticos

¿Cuál de los dos alcanza primero el equilibrio?

$T \equiv$ tiempo que transcurre hasta que $x(t)$ se repite

$$x(t) = x(t+T)$$

$$A\cos(\omega t+\delta) = A\cos[\omega(t+T)+\delta] = A\cos(\omega t+\delta+\omega T)$$

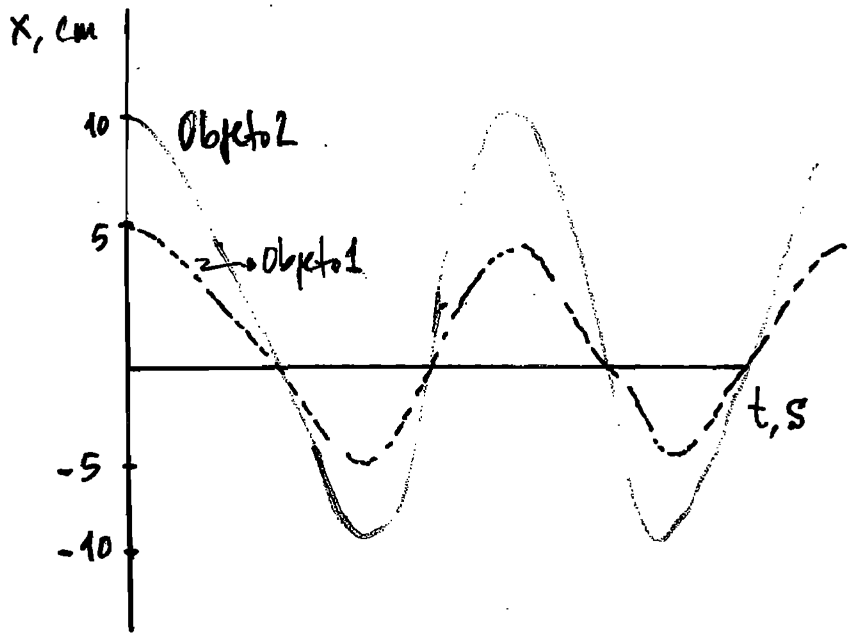
Sabemos que $\quad \cos\alpha = \cos(\alpha+2\pi)$

$$\Downarrow$$

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

"Periodo en MAS es independiente de la amplitud"



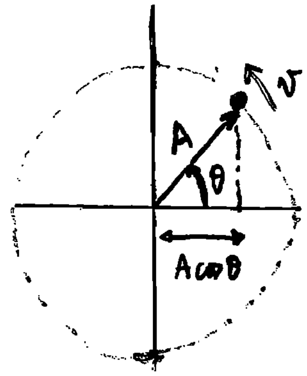
Ejemplo de MAS

a) Movimiento circular

Se mueve a v = cte en círculo de radio A

$$\theta = \omega t + \delta$$

$$x = A\cos\theta$$
$$= A\cos(\omega t + \delta) \quad \text{MAS}$$



$$\omega = \frac{v}{A}$$

Proyección sobre el diámetro: partícula se mueve con MAS

b) Péndulo Simple

Cuerda de longitud L donde cuelga masa m

Desde Φ_0 con vertical: empieza a oscilar alrededor de posición vertical con periodo T

Componente tangencial de la fuerza es la responsable de la oscilación

Arco de longitud medido desde el punto más bajo del círculo

$$S = L\Phi$$

$$\sum F_{tangenciales} = -mg\,\mathrm{sen}\,\Phi = m\frac{d^2 S}{dt^2}$$

$$= mL\frac{d^2}{dt^2}\Phi$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\Phi \approx -\frac{g}{L}\Phi$$ MAS en pequeños desplazamientos angulares

Si Φ es pequeño : $\mathrm{sen}\,\Phi \simeq \Phi$

Si lo reescribimos como $\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\omega^2\Phi$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Ec. movimiento:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Energía del Mov. armónico Simple

Energía total $= E_c(t) + E_p(t)$

$$F = -\frac{d}{dx}E_p = -kx \longrightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

Energía cinética: $E_c(t) = \frac{1}{2}m\,v^2(t)$

$$v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t+\delta)$$

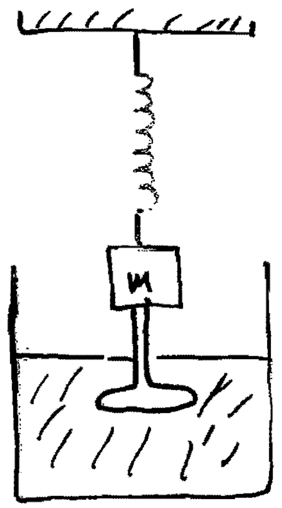
$$E_c(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\,\text{sen}^2(\omega t+\delta) \underset{\omega^2 = k/m}{=} \frac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t+\delta)$$

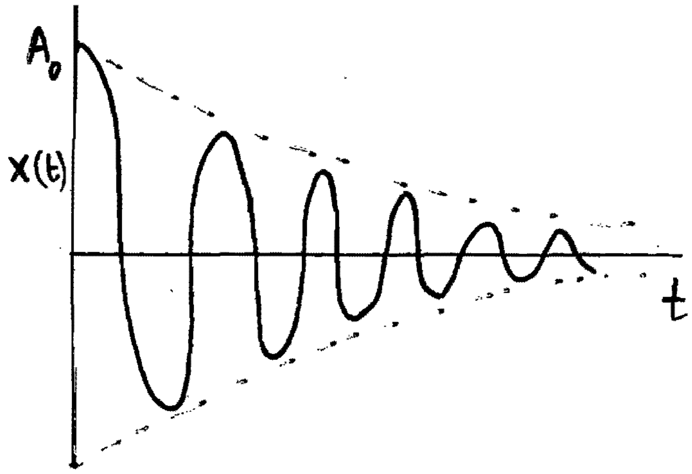
$$\begin{aligned} E_{total} &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta) + \frac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t+\delta) \\ &= \frac{1}{2}kA^2\left[\cos^2(\omega t+\delta) + \text{sen}^2(\omega t+\delta)\right] \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \equiv \text{constante} \end{aligned}$$

"Energía total en MAS es proporcional al cuadrado de la amplitud"

Oscilaciones amortiguadas

Efectos de frenado (resistencia del aire, fricción piezas mecánicas, ...): Oscilaciones amortiguadas





Amplitud y energía disminuyen en el tiempo. Aparece fuerza que se opone al movimiento. Dicha fuerza se puede representar como

$$-\gamma \frac{dx}{dt} \qquad \gamma \equiv \text{constante}$$

Fuerza produce trabajo negativo sobre sistema

Ley de Newton: $$F = -\left(kx + \gamma \frac{dx}{dt}\right) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\gamma \frac{dx}{dt}}_{\text{fricción}} + \underbrace{kx}_{\text{fuerza elástica}} = 0}$$

$$x(t) = A_0\, e^{-t/\tau} \cos(\omega_a t + \delta)$$

$$\tau = \frac{2m}{\gamma}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2}$$

$A_0 \equiv$ amplitud inicial

$\tau \equiv$ tiempo de relajación o amortiguamiento

$\omega_a \equiv$ frecuencia angular modificada

Si $\gamma = 0$, $\tau \to \infty$, recuperamos MAS

Definimos $\omega_0^2 \equiv k/m$

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{mk}\right)$$

$$= \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2\omega_0^2}\right)$$

$$\boxed{\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2} \qquad \gamma_c = 2m\omega_0}$$

$\gamma_c \equiv$ valor crítico

Si $\gamma > \gamma_c$, ω_a (??), el sistema NO oscila (sobreamortiguado)

Si $\gamma = \gamma_c$, $\omega_a = 0$, sistema vuelve al equilibrio sin prácticamente oscilar

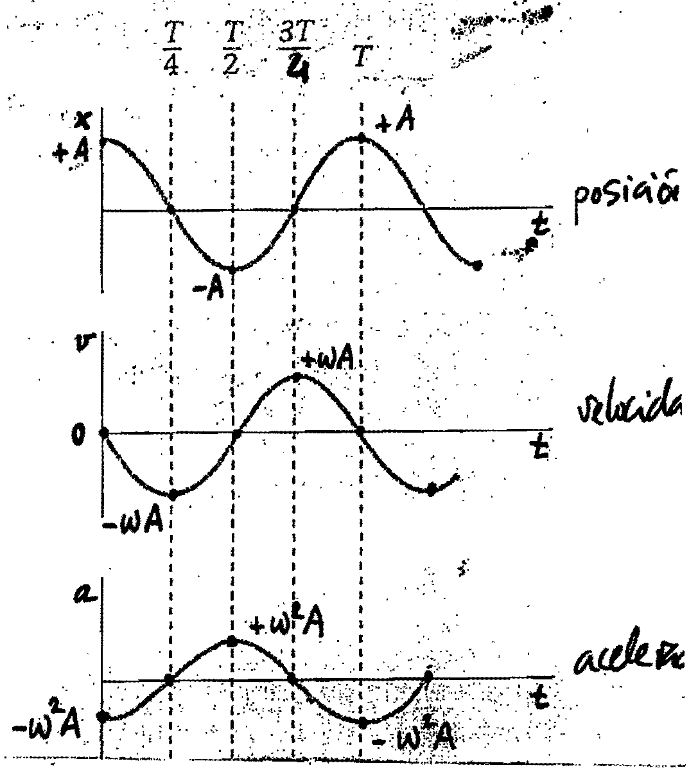
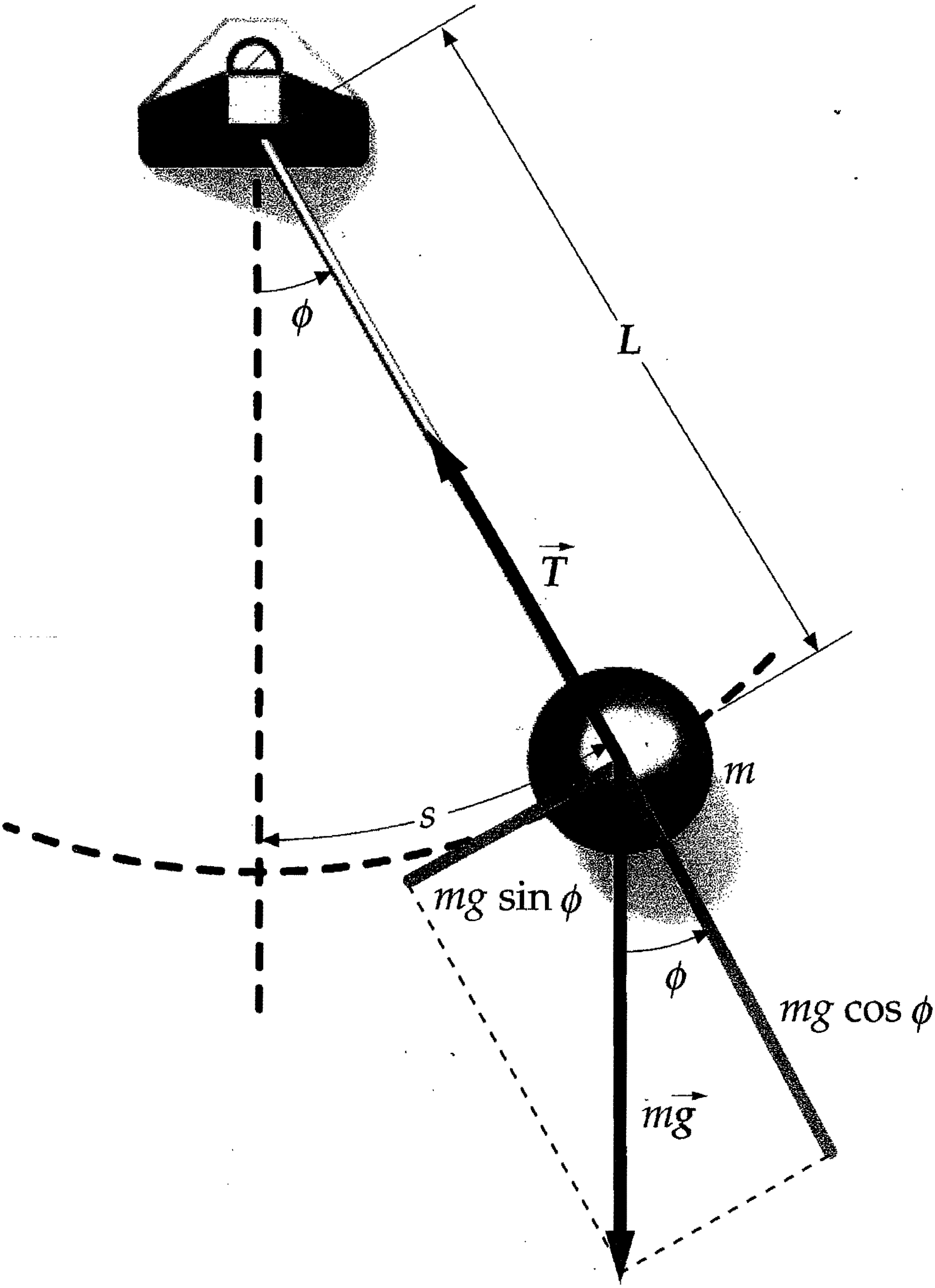


Figura 14.5 Gráficos de x, v y a en función del tiempo t para $\delta = 0$. En $t = 0$, el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración es negativa e igual a $-\omega^2 A$. La velocidad se hace negativa cuando el objeto se mueve hacia atrás buscando su posición de equilibrio. Después de un cuarto de período ($t = T/4$), el objeto está en equilibrio, $x = 0$, $a = 0$ y la velocidad alcanza su valor máximo ωA. En $t = T/2$, del desplazamiento es $-A$, la velocidad es de nuevo cero y la aceleración $+\omega^2 A$. En $t = 3T/4$, $x = 0$, $a = 0$ y $v = +\omega A$.

Transparency 57
Figure 14-14, page 416
Forces on a simple pendulum

Tipler: **Physics for Scientists and Engineers**
Fourth Edition, Volume 1



Transparency 54
Figure 14-8, page 410
Potential and kinetic energy of an object in simple harmonic motion

Tipler: **Physics for Scientists and Engineers**
Fourth Edition, Volume 1

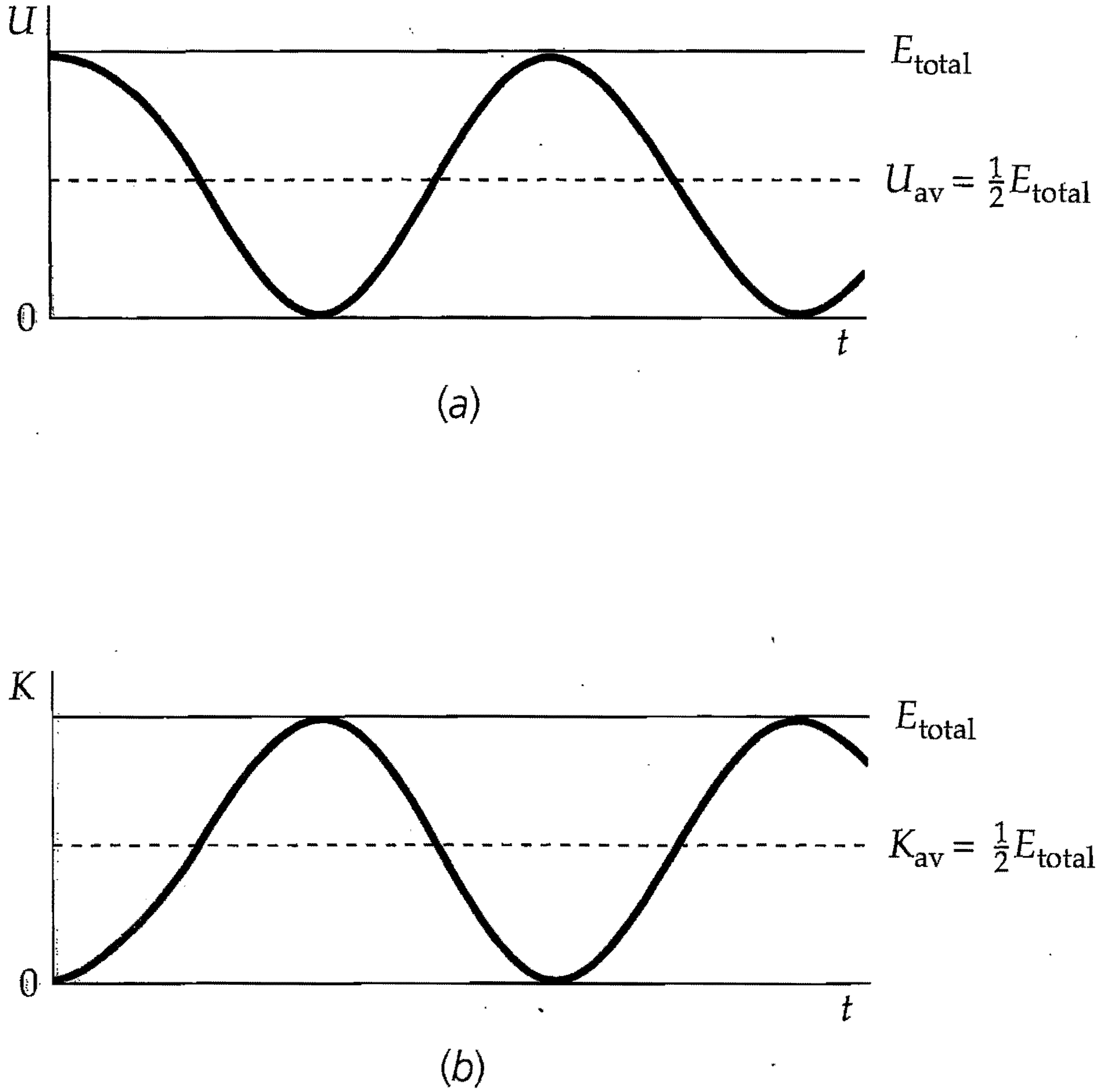


Figure 14-9, page 411
Potential energy function, total energy, and kinetic energy E for a mass on a spring

Tipler: **Physics for Scientists and Engineers**
Fourth Edition, Volume 1