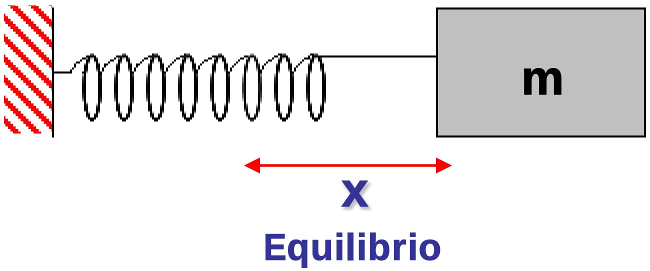
Tema 2
OSCILACIONES

CURSO 2009-2010

Una oscilación ocurre cuando un sistema es perturbado de su posición de equilibrio estable

Ejemplos: Balanceo de un barco, reloj de péndulo, cuerdas musicales, oscilaciones en moléculas de aire produciendo sonido, etc.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)



Cuando desplazamos el objeto de su posición de equilibrio, el muelle ejerce una fuerza recuperadora dada por la LEY DE HOOKE

$$\boxed{F = -Kx}$$

K: constante recuperadora del muelle (N/m)

Aplicando la segunda Ley de Newton

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \longrightarrow \boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x}$$

Característica del MAS: "La aceleración es proporcional al desplazamiento y de dirección negativa"

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)

La ecuación general de este tipo de movimiento es:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta) = A sen\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

donde:

<u>x(t)</u>: posición del objeto en cualquier instante.-<u> Elongación </u>(m)

<u>A</u>: <u>amplitud</u> del movimiento (m), máximo desplazamiento del equilibrio.

<u>ω</u>: <u>frecuencia angular o pulsación</u> (rad/s).

<u>δ</u>: <u>desfase o fase de oscilación</u> (rad) (condiciones iniciales)

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = -A\omega sen(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$$

$$\boxed{a = -\frac{K}{m}x} \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

A y δ se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales

$$x(t=0) = x_0 = A\cos\delta$$

$$v(t=0) = v_0 = -A\omega sen\delta$$

Periodo T: tiempo en el cual se repite x(t).

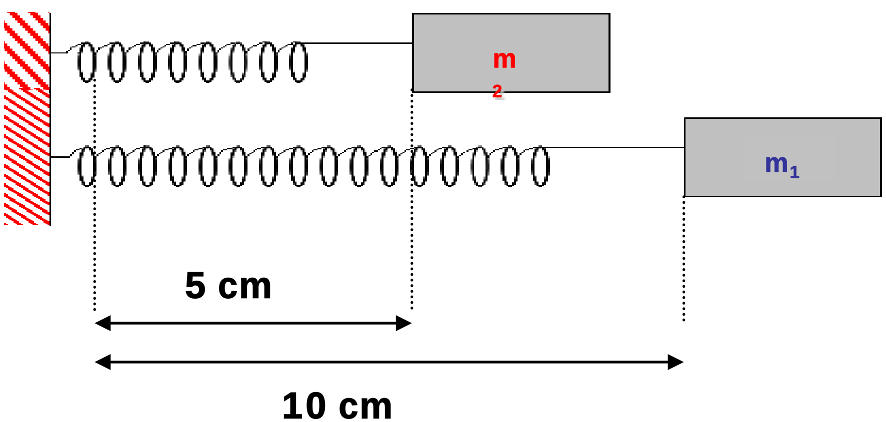
$$x(t) = x(t+T) \Rightarrow A\cos[\omega(t+T)+\delta] = A\cos(\omega t + \delta + \omega T)$$

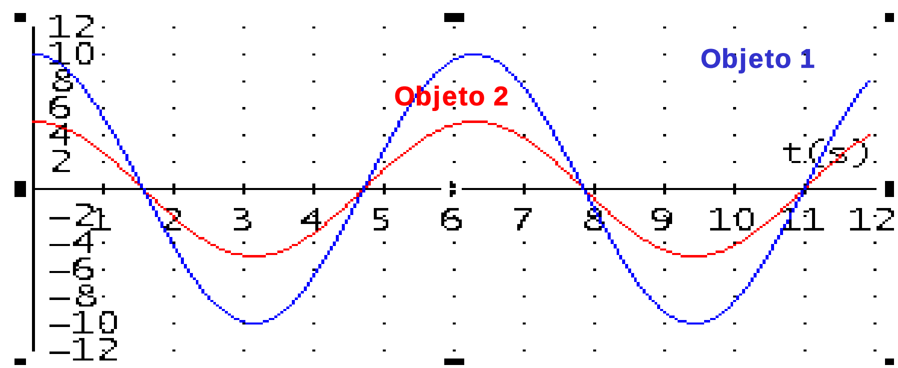
$$\omega T = 2\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}} \\[2ex] T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} \end{array}}$$

Independientes de la amplitud A

¿Qué objeto llegará primero a su posición de equilibrio si se sueltan a la vez?

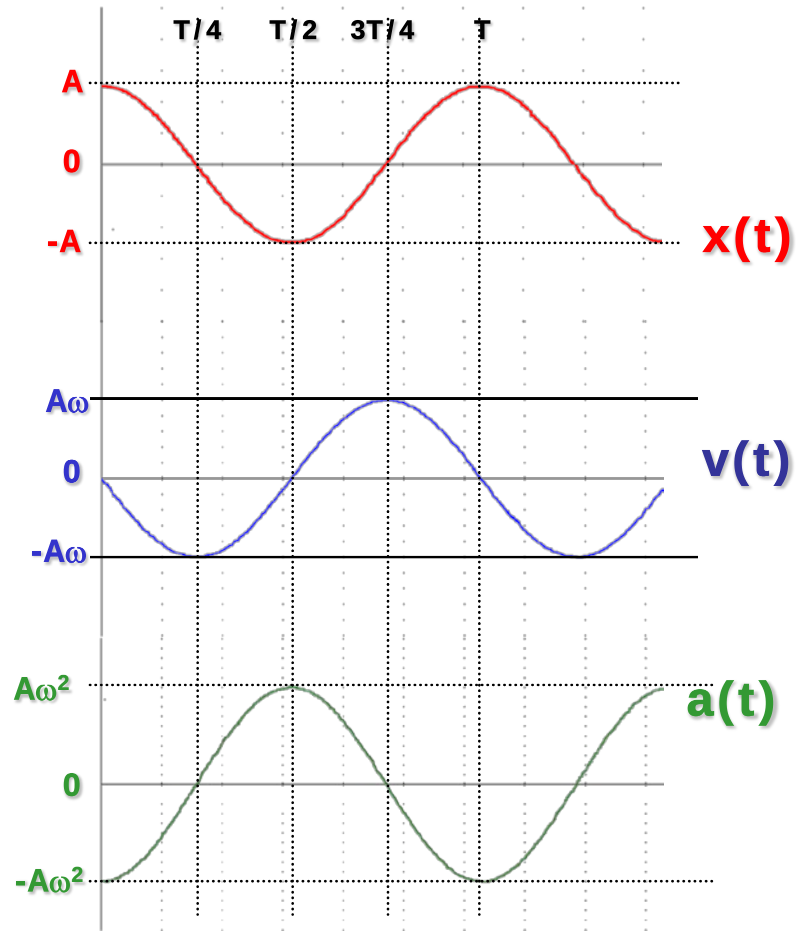




MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)

$$x(t) = A\cos\omega t$$
$$v(t) = -A\omega sen\omega t$$
$$a(t) = -A\omega^2\cos\omega t$$

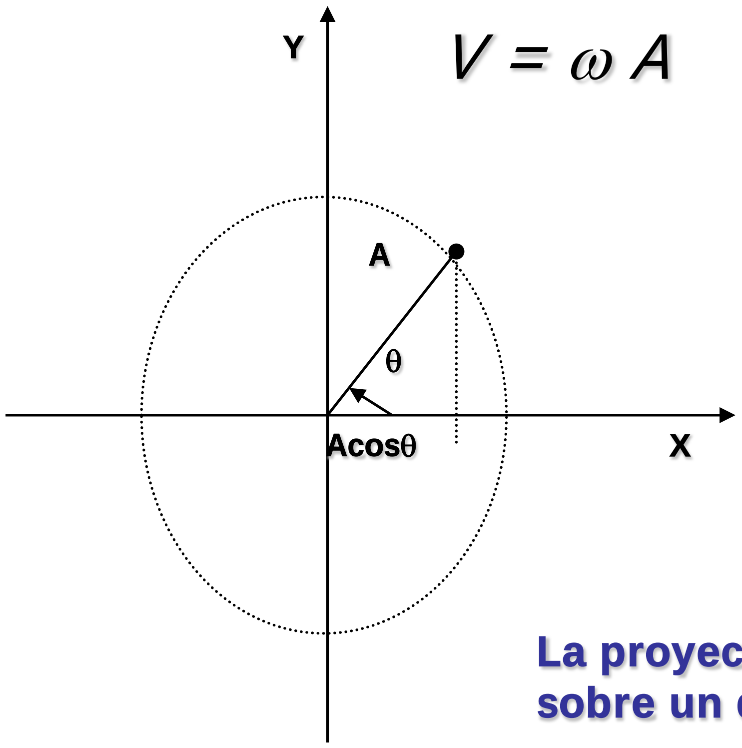
$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$
$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} = \pi$$
$$t = \frac{3T}{4} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$$
$$t = T \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T}T = 2\pi$$



EJEMPLOS DE MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

a) <u>MOVIMIENTO CIRCULAR</u>

V = constante



$$V = \omega A$$

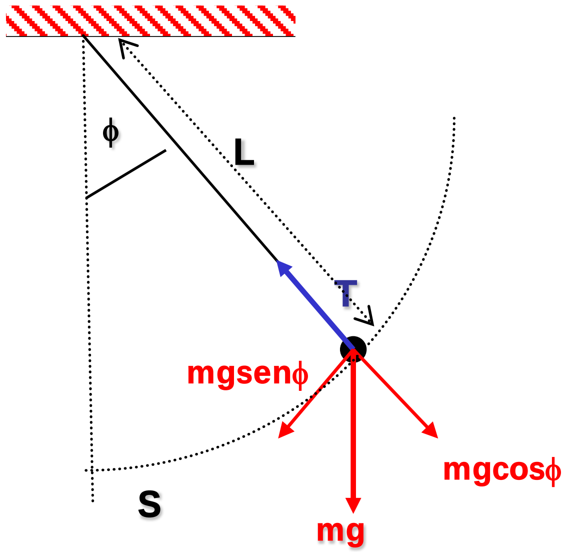
$$\theta = \omega t + \delta$$

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$y = Asen\theta = Asen(\omega t + \delta)$$

La proyección de un movimiento circular uniforme sobre un diámetro constituye un MAS

b) PÉNDULO SIMPLE



$$\sum F_t = -mgsen\phi = m\frac{d^2S}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}sen\phi \approx -\frac{g}{L}\phi$$

Aproximación desplazamientos pequeños

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -\omega^2\phi(t) \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Ecuación del movimiento

$$\boxed{\phi(t) = \phi_0\cos(\omega t + \delta)}$$

Energía del “MAS”

Las energías potencial y cinética del sistema varían con el tiempo, permaneciendo la energía total constante

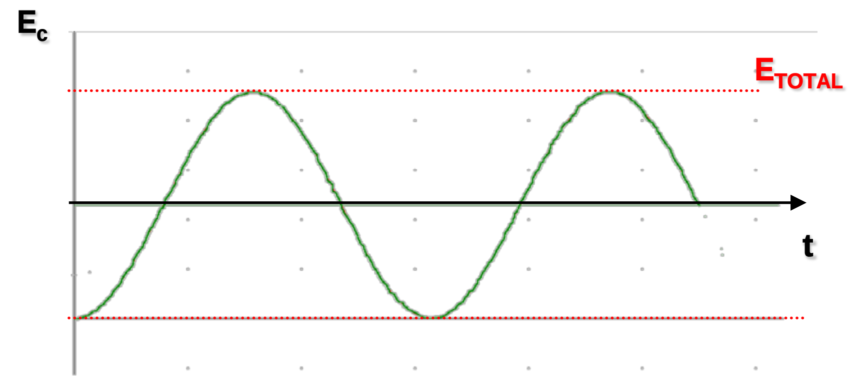
$$E_P(t)=\frac{1}{2}Kx^2=\frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

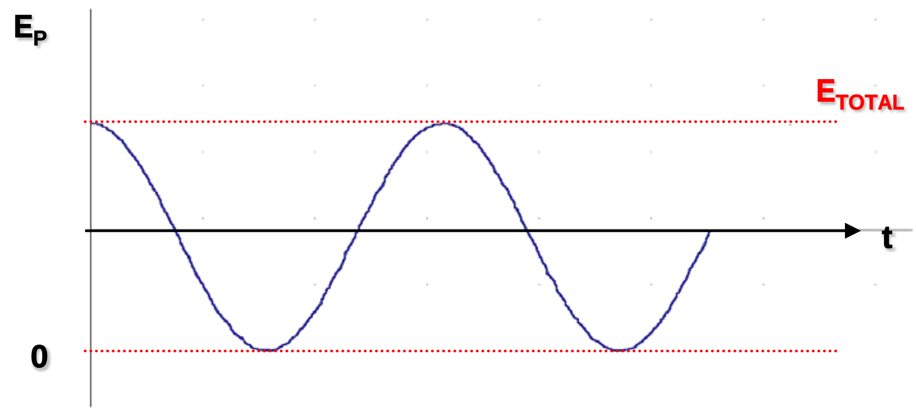
$$E_C(t)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t+\delta)=$$

$$=\frac{1}{2}KA^2 sen^2(\omega t+\delta)$$

$$\boxed{E_T=\frac{1}{2}KA^2=cte}$$

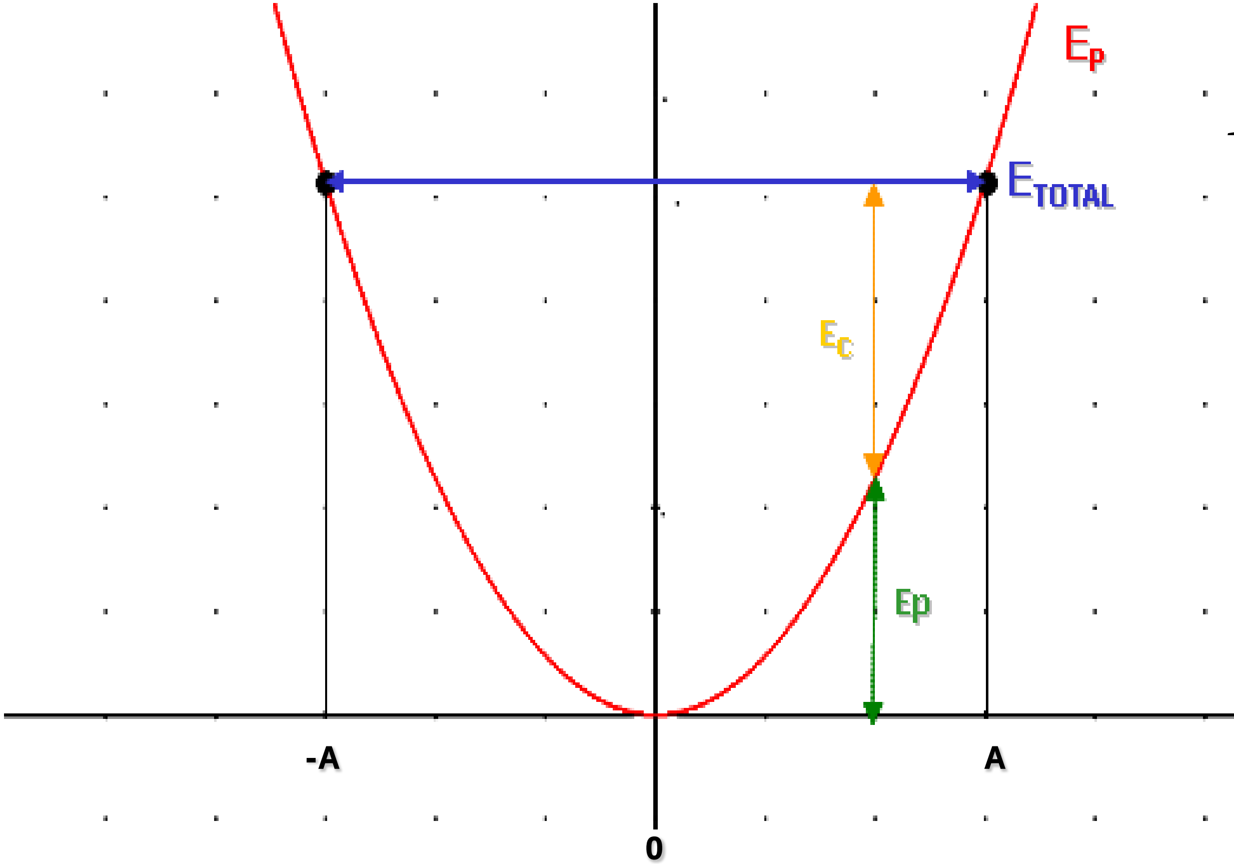
La energía total es proporcional al cuadrado de la amplitud A





$$E_p(media)=E_C(media)=\frac{1}{2}E_{TOTAL}$$

ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



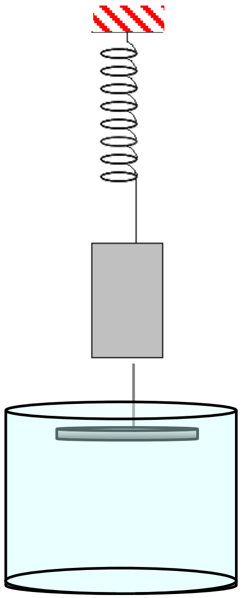
$$E_P(t) = \frac{1}{2}Kx^2$$

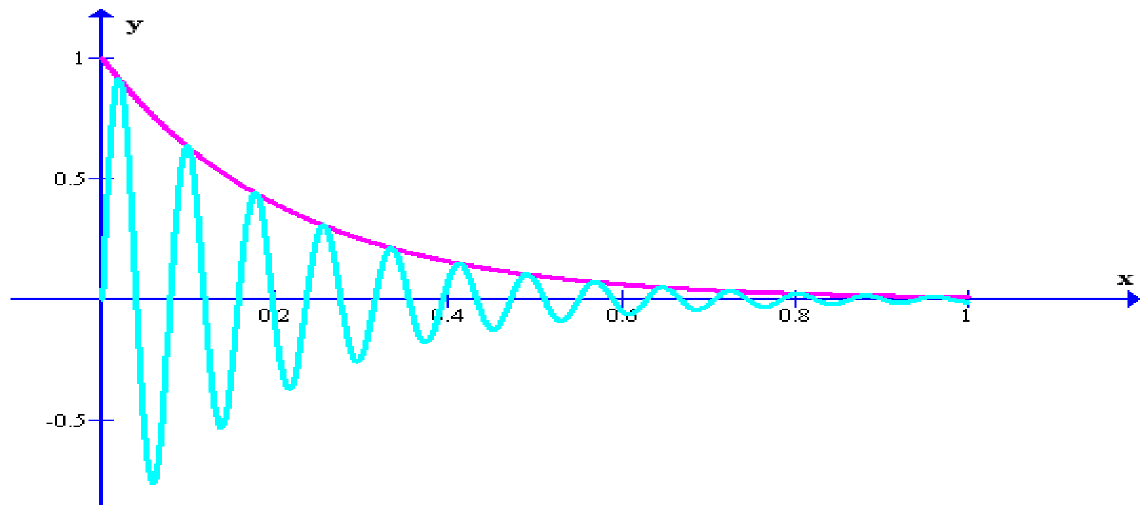
La energía total es constante (linea horizontal). Esta línea corta a la función de la energía potencial en 2 puntos (x=-A y x=A), los puntos de retorno.

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Se deben a efectos de frenado (resistencia del aire, fricción en piezas mecánicas, ...)

La amplitud (y energia) van disminuyendo en el tiempo





Hay una fuerza que se opone al movimiento, de la forma: $F = -\gamma \dfrac{dx}{dt}$

γ constante

2ª ley Newton

$$F = -(Kx + \gamma \frac{dx}{dt}) = m \frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + Kx = 0}$$

Ecuación diferencial de un oscilador armónico amortigüado

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

$$\boxed{x(t) = A_0^{-\left(\gamma/2m\right)t}\cos(\omega_a t + \delta) = A_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega_a t + \delta)}$$

A_0: amplitud inicial

τ: tiempo de relajación o amortiguamiento = $2m/\gamma$

ω_a: frecuencia angular modificada

$$\omega_a^2 = \frac{K}{m} - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2} = \frac{K}{m}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{mK}\right) = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{mK}\right) = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2\omega_0^2}\right)$$

$$\boxed{\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4m^2\omega_0^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_C}\right)^2}}$$

$\gamma_C = 2m\omega_o$

Valor crítico

a) $\gamma < \gamma_C \Rightarrow$ Sistema subamortiguado

b) $\gamma = \gamma_C \Rightarrow$ Críticamente amortiguado (vuelve al equilibrio casi sin oscilar)

c) $\gamma > \gamma_C \Rightarrow$ (ω_a??) Sistema sobreamortiguado (El sistema no oscila)