ONDAS. PROPAGACIÓN DE ONDAS

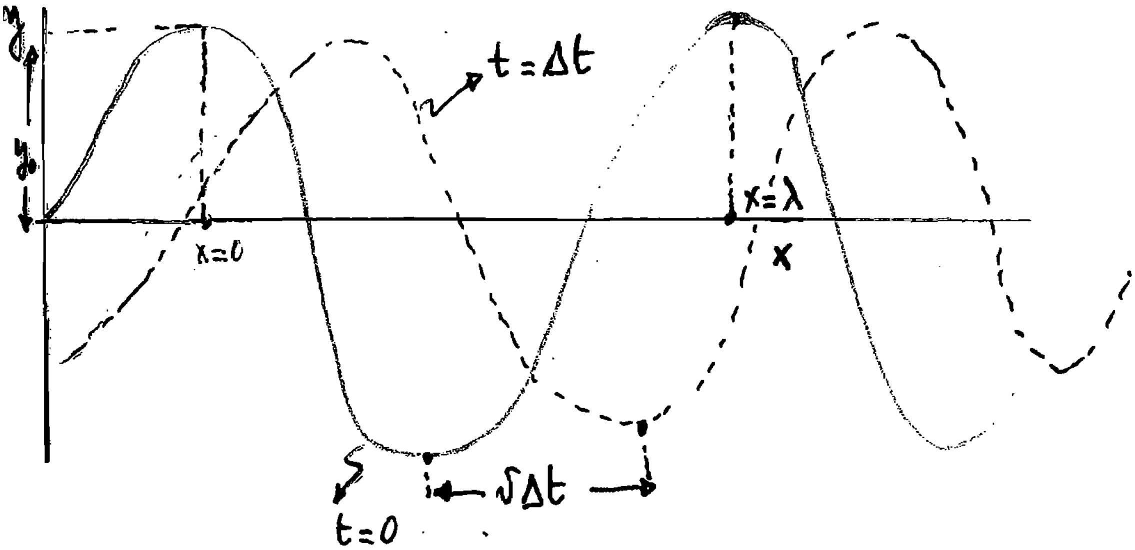
Transporte de energía, sin transporte de masa

Diferencia entre oscilación y onda: onda es una perturbación (variación de energía) que se propaga

Ejemplos: propagación del "golpe" de látigo en una cuerda, ondas en la superficie de estanque, ...

Describir movimientos oscilatorios: sinusoides

Consideremos una cuerda en dos instantes sucesivos



Forma de la oscilación varía en el tiempo t. Además hay un desplazamiento en la dirección x

Oscilaciones temporales: periodo de tiempo en que una oscilación tarda en repetirse

Onda sinusoidal: se repite también en el espacio

Longitud de onda λ: distancia mínima a la cual la onda se repite

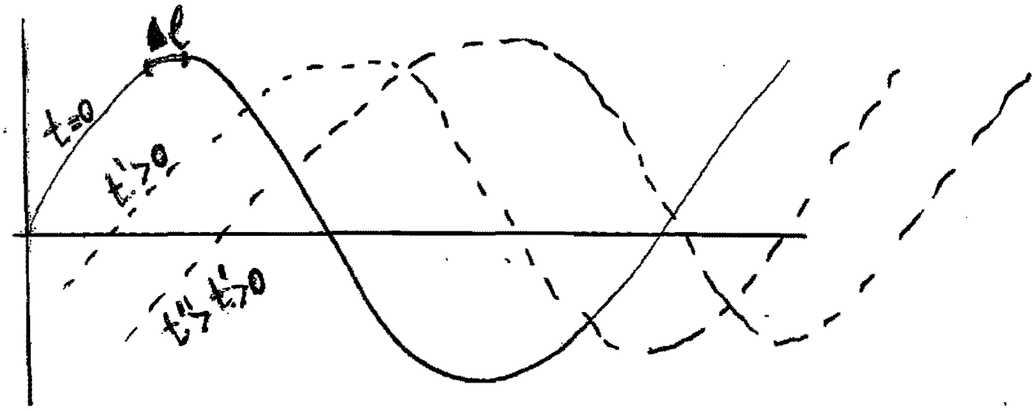
$t=0$: $y(x,t=0) = y_0 \cos kx$

k se determina a partir de que la onda presenta un máximo en $x=0$ y el siguiente en $x=\lambda$:

$$\cos k\lambda = 1 \Rightarrow k\lambda = 2\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$k \equiv$ número de onda

¿Cuál es la relación de k y λ con el periodo (frecuencia) de la onda?



Velocidad de propagación v: velocidad con la que se mueve la perturbación

Supongamos $v \equiv cte$

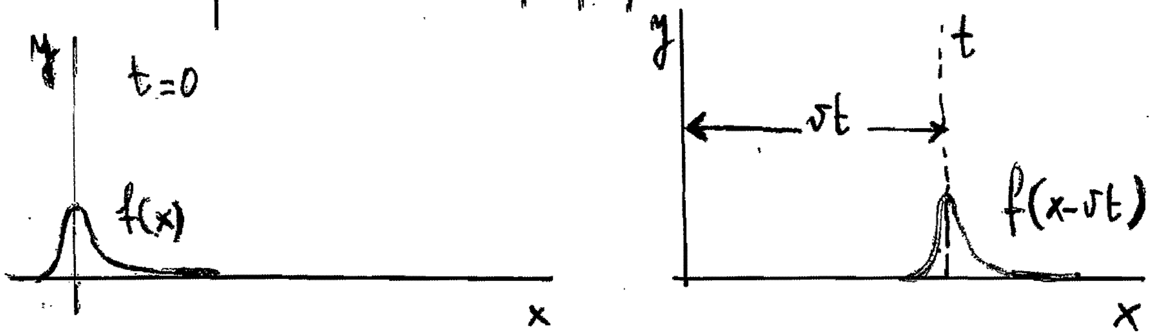
Trozo de cuerda Δl volverá a su posición inicial después de un tiempo = periodo T

En ese tiempo la onda ha realizado una oscilación completa: espacio recorrido es λ

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}}$$

Ecuación de la onda

Forma en que la onda se propaga en la cuerda



Sistema de referencia inercial que se mueve a la velocidad v de la onda. En ese sistema de referencia la forma de la onda no cambia, ya que la onda no se propaga. Sólo existe oscilación temporal

$$t = 0 : \quad y(x,0) = y_0 \cos kx$$

Sistema de referencia móvil, ligado a la onda

$$y'(x',t) = y'_0 \cos kx'$$

Relación entre los dos observadores:

$$y = y'$$
$$x = x' + v t$$

$$y'(x',t) = y_0 \cos k(x') = y_0 \cos k(x - vt)$$
$$= y_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx \mp \omega t)}$$

$(-)$: ondas viajeras hacia la derecha
$(+)$: ondas viajeras hacia la izquierda

Ondas transversales y longitudinales

Onda transversal: onda produce oscilación en las partículas del medio en el que se propaga perpendicular a la dirección de propagación

Ejemplo: cuerda elástica. Onda se propaga de izqda a derecha y el elemento de cuerda Δl se mueve arriba y abajo

Onda longitudinal: Oscilación en el medio se da en la misma dirección de propagación

Ejemplo: Ondas sobre muelle sujeto por dos extremos

Onda transversal elástica

Relacionar propiedades de la onda con parámetros elásticos de la cuerda

Tensión F_t

Densidad lineal de masa $\mu = M/L$

Análisis dimensional

Velocidad de la onda $v \equiv$ cte

$$v = f(F_t, \mu) \sim F_t^{a} \mu^{b}$$

Homogeneidad en las dimensiones de la ecuación

$$\left.\begin{aligned} [v] &= LT^{-1} \\ [F_t] &= MLT^{-2} \\ [\mu] &= ML^{-1} \end{aligned}\right\} \quad LT^{-1} = (MLT^{-2})^{a} (ML^{-1})^{b}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a+b \\ 1 &= a-b \\ -1 &= -2a \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= +\tfrac{1}{2} \\ b &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$v = C\sqrt{F_t/\mu} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}}}$$

$$C = 1$$

Ondas sonoras en gas: $v = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$

$\gamma \equiv$ cte depende del gas

$M \equiv$ Masa molar gas

Energía de las ondas en una cuerda

Consideramos una cuerda sujeta a un diapasón. Al vibrar, imparte energía al segmento de cuerda unido a él. Movimiento de una onda a lo largo de la cuerda $\Rightarrow$ transmisión de energía

Energía cinética del segmento de longitud Δx y masa $\mu \Delta x$

$$y = A\cos(kx - \omega t)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(\Delta m)\, v_y^2 = \frac{1}{2}(\mu \Delta x)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dt} = A\omega \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

x se considera fijo

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$$

Energía potencial: trabajo realizado al estirar la cuerda

$$\Delta U = \frac{1}{2} F_t \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Delta x$$

tensión de la cuerda

$$F_t = \mu v^2 = \mu\, \omega^2 / k^2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\,\mu\omega^2 A^2 \Delta x \,\mathrm{sen}^2(kx-\omega t)$$

Energía total de un segmento de la cuerda

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta U = \mu\omega^2 A^2 \Delta x \,\mathrm{sen}^2(kx-\omega t)$$

La energía de un segmento depende del tiempo

Energía media en cualquier punto

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}\,\mu\omega^2 A^2 \Delta x$$

Resultado análogo a masa $\mu\Delta x$ sujeta a un muelle que oscila con movto armónico simple

Superposición de ondas. Ondas estacionarias

Superposición de ondas armónicas en cuerda elástica

$$y_1 = A\cos(kx - \omega t + \Phi_1)$$

$$y_2 = A\cos(kx - \omega t + \Phi_2)$$

Difieren en la fase. Supongamos que se superponen en un punto

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\cos(kx-\omega t+\Phi_1) + \cos(kx-\omega t+\Phi_2)\right]$$

$$= \left[2A\cos(\delta\Phi)\right]\cos(kx-\omega t+\Delta\Phi)$$

donde

$$\delta\Phi \equiv \tfrac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$\Delta\Phi \equiv \tfrac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$$

Superposición de dos ondas armónicas es una onda armónica con amplitud y fase modificadas

casos extremos: a) Ambas ondas en fase: $\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \delta\Phi = 0$

$A \to 2A$: superposición constructiva

b) Ambas ondas en contrafase: $\Phi_1 - \Phi_2 = \pi \Rightarrow \delta\Phi = \pi/2$

$y = 0$: superposición destructiva

Supongamos dos ondas en fase con direcciones de propagación opuestas:

$$y_1 = A\cos(kx-\omega t)$$

$$y_2 = A\cos(-kx-\omega t) = A\cos(kx+\omega t)$$

$$\boxed{y = y_1+y_2 = 2A\cos(\omega t)\cos(kx)}$$

Componentes espacial y temporal de la onda están desacopladas. Movto oscilatorio sin propagarse: onda estacionaria

Al no haber propagación, no se transmite energía
Ejemplo: propagación en una cuerda con extremos fijos

Puntos en que $kx = 0$ (ó múltiplos de π): Oscilación máxima (Vientres)

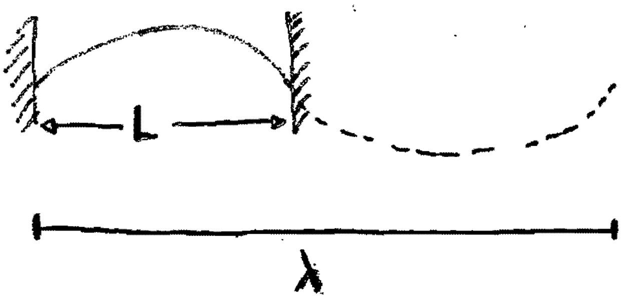
Puntos en que $kx = \frac{\pi}{2}$ (o múltiplos de $\frac{\pi}{2}$): No hay oscilación (Nodos)

Ejemplo de cuerda elástica con extremos fijos: Al llegar la onda al extremo se refleja. Onda reflejada está en fase con incidente y de dirección opuesta de propagación: Onda estacionaria.

a) Cuerdas de instrumento musical

Nodos en extremos fijos

n=1

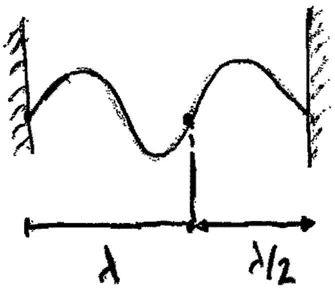


$\lambda_1 = 2L$

n=2

$\lambda_2 = L$, $\lambda_2 = \frac{2}{2} L$

n=3



$L = \lambda_3 + \frac{\lambda_3}{2} = \frac{3}{2}\lambda_3$, $\lambda_3 = \frac{2}{3} L$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

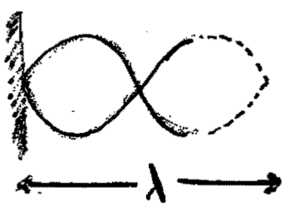
b) Extremo fijo y otro móvil

Extremo fijo : nodo   Extremo móvil : vientre

n=1

$\lambda_1 = 4L$

n=2



$\frac{3}{4}\lambda_2 = L$, $\lambda_2 = \frac{4}{3} L$, $\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}$

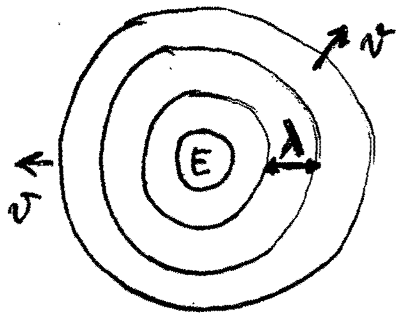
Efecto Doppler

Ondas sufren alteraciones debido al modo en que son recibidas o bien porque el emisor se mueve.

Ejemplo: suena distinto el sonido del tren según se acerca o se aleje → Efecto Doppler

a) Receptor móvil

$R_e \to v_r$



$v \equiv$ velocidad de propagación de la onda en el medio

Receptor ve acercarse las ondas a $v' = v + v_r$ pero sin notar variación en su longitud de onda λ

$$f_r = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_r}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{v}{f_e} \Rightarrow \boxed{f_r = \frac{v + v_r}{v} f_e = \left(1 + \frac{v_r}{v}\right) f_e}$$

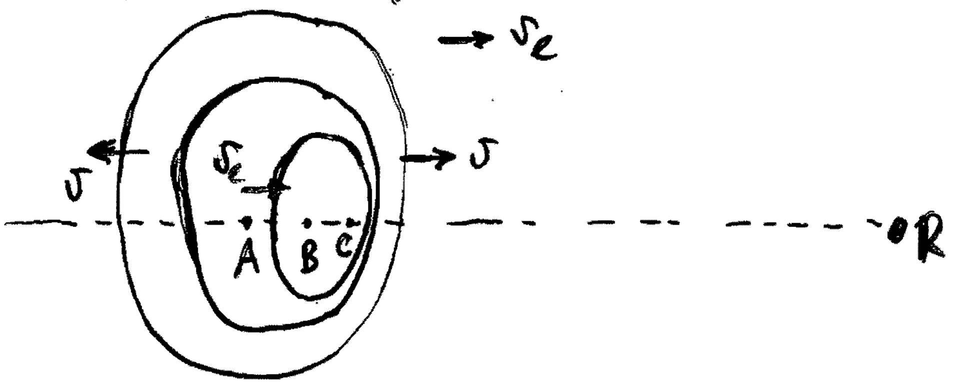
(receptor moviéndose hacia fuente)

$$\boxed{f_r = \left(1 \pm \frac{v_r}{v}\right) f_e}$$

+ receptor se acerca
− receptor se aleja

b) Emisor móvil

Receptor en reposo y el emisor se mueve hacia él.



Longitud de onda se notará distinta según la dirección en que la "observamos"

Entre A y B, el emisor se ha desplazado. La onda se emite en posición distinta

T_e: periodo de las ondas

$A \longleftrightarrow B$ ($v_e T_e$)

Emisor acercándose a R quieto

$$\lambda_r = \lambda_e - v_e T_e$$

En la dirección opuesta $\lambda_r = \lambda_e + v_e T_e$

Por delante del frente de onda, las ondas se comprimen mientras que por detrás, las ondas están más expandidas

$$\lambda_r = \lambda_e - \frac{v_e}{f_e} \rightarrow \frac{v}{f_r} = \frac{v}{f_e} - \frac{v_e}{f_e} = \frac{1}{f_e}(v - v_e)$$

$$\boxed{f_r = \frac{v}{v - v_e} f_e}$$

$$\boxed{f_r = \frac{v}{v \mp v_e} f_e}$$

(− emisor acercándose
+ emisor alejándose)

c) Caso General

$$\boxed{f_r = \frac{v \pm v_r}{v \mp v_e} f_e}$$

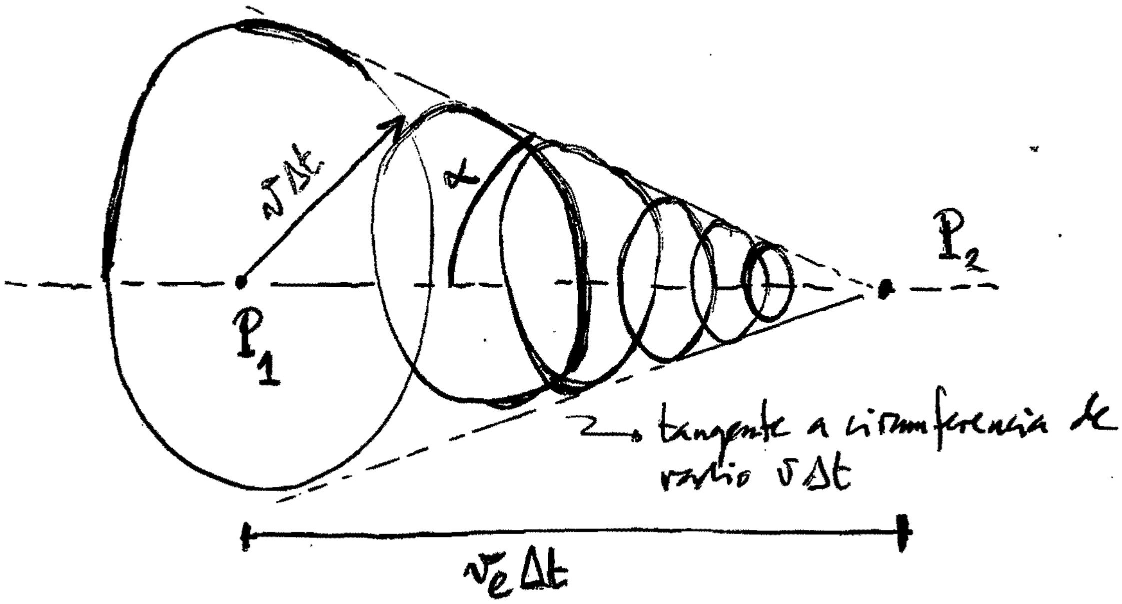
+ R se acerca
− R se aleja

− E se acerca
+ E se aleja

Ondas de choque

En las expresiones anteriores se ha supuesto que (v_e, v_r) son más pequeñas que la velocidad del frente de onda v en el medio

Si emisor se mueve superando la velocidad del sonido en el medio ($v_e > v$), las ondas se apelotonan detrás del emisor



En P_1 se emite onda esférica. Transcurrido Δt su frente de onda recorre distancia $v\Delta t$

En el mismo Δt, emisor avanza hasta P_2. Distancia entre P_1 y P_2 : $v_e \Delta t$

Como $v_e > v$ no hay frente de ondas por delante de la fuente emisora y las ondas se apilan detrás de la fuente: onda de choque

En el caso del sonido: "estruendo" al llegar al receptor. Ondas quedan encerradas en un cono de anchura determinada por α

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v \Delta t}{v_e \Delta t} = \frac{v}{v_e} = M^{-1}$$

Número de Mach : $M = \dfrac{v_e}{v}$

Transparency 65
Figure 16-11, page 488; Figure 16-15, page 492
Standing waves on a string fixed at both ends (*left*) and on a string fixed at one end (*right*)