ALGUNAS EXPRESIONES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Consideremos un sistema de coordenadas cilíndricas (r,θ,z), donde r es la coordenada radial, θ la angular y z la axial. Consideremos también un sistema de coordenadas esféricas (r,θ,ϕ), donde r es la coordenada radial, θ la polar y ϕ la azimutal. En esta nota se proporcionan algunas expresiones relevantes, utilizando estos dos sistemas de coordenadas.

1. **Líneas de corriente**

   En coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de una línea de corriente son

$$\frac{dv_r}{v_r} = r\frac{d\theta}{v_\theta} = \frac{dz}{v_z}, \tag{1}$$

   mientras que en coordenadas esféricas es

$$\frac{dv_r}{v_r} = r\frac{d\theta}{v_\theta} = r\,\mathrm{sen}\theta\frac{d\phi}{v_\phi}. \tag{2}$$

2. **Derivada sustancial**

   La derivada sustancial en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3}$$

   mientras que en coordenadas esféricas es

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{4}$$

3. **Aceleración de una partícula fluida**

   En coordenadas cilíndricas, la aceleración de una partícula fluida es

$$\mathbf{a} = \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r}\right)\mathbf{u}_r + \left(\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right)\mathbf{u}_\theta + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{u}_z, \tag{5}$$

   donde la derivada sustancial viene dada por la relación (3). En coordenadas esféricas, la aceleración es

$$\mathbf{a} = \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right)\mathbf{u}_r + \left(\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\,\mathrm{cot}\theta}{r}\right)\mathbf{u}_\theta + \left(\frac{dv_\phi}{dt} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\,\mathrm{cot}\theta}{r}\right)\mathbf{u}_\phi, \tag{6}$$

   donde la derivada sustancial viene dada por la relación (4).

4. **Divergencia**

   En coordenadas cilíndricas, la divergencia es

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{7}$$

   mientras que en coordenadas esféricas es

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}. \tag{8}$$

5. **Operador Laplaciano**

   En coordenadas cilíndricas, el operador laplaciano es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{9}$$

   mientras que en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{10}$$