PROBLEMAS GRUPO 3

Daniel Bejarano Salgado

David González Flores

Jairo Mena Sánchez

20º-*Consideremos el flujo incompresible en un conducto recto de sección circular de radio R (flujo de Hagen-Poiseuille). La región en estudio está lo suficientemente alejada de la entrada para que el flujo sea puramente axial ($v_z \neq 0$), mientras que $v_r = v_\theta = 0$. Determinar el perfil de velocidades suponiendo simetría axial y despreciando los efectos de la gravedad.*

En primer lugar, hagamos un esquema de la situación:

Dado que no nos dicen nada, asumimos que el flujo es estacionario, y como nos dicen que es incompresible, por la ecuación de continuidad tenemos que la densidad es constante.

Como es lógico, el flujo irá en la dirección z, y el campo de velocidades no puede variar en la dirección del flujo, por tanto, deducimos que la dependencia de la componente $v_z$es puramente radial. Por tanto tendremos:

$$v_r = 0; v_\theta = 0; v_z \equiv v_z(r)$$

Para obtener el campo de velocidades, usaremos las ecuaciones de Navier-Stokes en las condiciones de fluido incompresible, que en coordenadas cilíndricas son:

$$\frac{\partial}{\partial t}v_r + (\vec{v}.\nabla)v_r - \frac{1}{r}v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + g_r + \upsilon\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}v_\theta\right) \qquad (I)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_\theta + (\vec{v}.\nabla)v_\theta + \frac{1}{r}v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + g_\theta + \upsilon\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}v_\theta\right) \qquad (II)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_z + (\vec{v}.\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g_z + \upsilon\nabla^2 v_z \qquad (III)$$

Además necesitaremos lo siguiente en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{v}.\nabla = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Si particularizamos para el caso que tenemos entre manos, y despreciando la gravedad las 3 ecuaciones de Navier-Stokes quedan así:

$$I \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad P \neq P(r)$$

$$II \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad P \neq P(\theta)$$

$$III \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)$$

Por tanto, de la ecuación III, tenemos:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)$$

Dado que el término de la izquierda sólo depende de z y el término de la derecha sólo depende de r, para que sean iguales, ambos han de ser iguales a una constante, que llamaremos c_1. Por tanto:

$$\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) = c_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{rc_1}{\upsilon}$$

Si integramos esta expresión respecto a r tendremos:

$$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r^2 c_1}{2\upsilon} + c_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{rc_1}{2\upsilon} + \frac{c_2}{r}$$

Si integramos por segunda vez respecto a r obtenemos el campo de velocidades:

$$\boxed{v_z(r) = \frac{r^2 c_1}{4\upsilon} + c_2 \ln(r) + c_3}$$

Determinación de las constantes:

Ya hemos dicho que:

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}}$$

En r=0 lógicamente el perfil de velocidades debe ser finito, por tanto:

$$\boxed{c_{2=}0}$$

Por último, suponemos que la pared está quieta, por lo que tenemos la siguiente condición:

$$v_z(R) = 0 = c_3 + \frac{R^2}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}$$

Despejando:

$$\boxed{c_3 = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}}$$

Por tanto el campo de velocidades es:

$$v_r = 0;$$

$$v_\theta = 0;$$

$$v_z(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}(r^2 - R^2)$$

***21º**-Consideremos las condiciones del flujo de Hagen-Poiseuille). Calcular en ese caso,*

a) El esfuerzo cortante en la pared,
b) La velocidad media

El tensor de tensiones de la viscosidad en coordenadas cilíndricas es:

$$\begin{pmatrix} \sigma`_{rr} & \sigma`_{r\theta} & \sigma`_{rz} \\ \sigma`_{\theta r} & \sigma`_{\theta\theta} & \sigma`_{\theta z} \\ \sigma`_{zr} & \sigma`_{z\theta} & \sigma`_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r} & \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) & \eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) & 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) & \eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) & \eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) & 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta los valores que tenemos para la velocidad, tendremos que todas las componentes, salvo dos:

$$\sigma`_{rz} = \sigma`_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

Hagamos las derivadas:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial P}{\partial z}r$$

Para obtener el esfuerzo cortante en la pared valoramos en r=R, por lo que nos queda:

$$\sigma`_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma`_{rr} & \sigma`_{r\theta} & \sigma`_{rz} \\ \sigma`_{\theta r} & \sigma`_{\theta\theta} & \sigma`_{\theta z} \\ \sigma`_{zr} & \sigma`_{z\theta} & \sigma`_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial z}R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la velocidad media, utilizamos el caudal, de modo que:

$$v_{media} = \frac{Q}{S}, siendo\ Q = \int \vec{v}.\overrightarrow{dS}$$

Teniendo en cuenta, que S será una superficie normal a la velocidad, y por tanto dS será paralelo a la velocidad, el diferencial de superficie en cilíndricas será:

$$dS = rd\theta dr$$

Por tanto:

$$Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}(r^2 - R^2) r dr d\theta = 2\pi \frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z} \int_{r=0}^{R} (r^3 - R^2 r) dr$$

Si hacemos la integral, nos queda:

$$Q = 2\pi \frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2}\right) = -\frac{\pi}{8\eta}\frac{\partial P}{\partial z} R^4$$

Por tanto, teniendo en cuenta que la superficie S es la de un círculo de radio R, tenemos que la velocidad media es:

$$\boxed{v_{media} = \frac{-\frac{\pi}{8\eta}\frac{\partial P}{\partial z} R^4}{\pi R^2} = -\frac{1}{8\eta}\frac{\partial P}{\partial z} R^2}$$