Ejercicio 22

Leticia Jaén Tapia, Javier Vaquero Martínez

January 8, 2012

Enunciado

Consideremos un fluido con densidad y viscosidad constantes entre dos cilindros concéntricos de radios $R_2 > R_1$. No hay movimiento axial o efectos de borde por lo que $v_z = 0$. Supongamos que el cilindro interior gira con velocidad angular Ω y el cilindro exterior está en reposo. Dado que hay simetría circular, la velocidad es independiente de θ y sólo es función de r. Determinar el perfil de velocidades.

Resolución

Dado que el único movimiento que induce al fluido a salir a su estado de reposo es el del cilindro interior, podemos deducir que no tendremos componente radial de la velocidad. Por tanto, contamos con los siguientes datos:
$\rho = cte$
$\eta = cte$
$v_z = 0$
$v_\theta = v_\theta(r)$
$v_r = 0$
Problema estacionario.
Podemos aplicar la ecuación de Navier-Stokes para obtener el campo de velocidades. En este caso estamos utilizando coordenadas cilíndricas. Para la coordenada acimutal, θ:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \eta\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \tag{1}$$

El lado izquierdo de la ecuación vale cero (problema estacionario, las velocidades distintas de v_θ son cero, y ésta solo depende de r). En el lado derecho tenemos que el primer término es cero (problema invariante respecto a θ) y del segundo sólo quedan los sumandos que involucran $v_\theta$ya que el resto de componentes de la velocidad son nulos.
Del mismo modo, podemos demostrar que se hacen cero los valores indicados, si utilizamos la ecuación de continuidad:

$$\rho(v\cdot\nabla)v_\theta + \frac{\rho v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \eta\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2}\right) \tag{2}$$

Desarrollando el Laplaciano,

$$\rho(v\cdot\nabla)v_\theta = \rho(v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z})v_\theta \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que v_θ sólo depende de r, y sustituyendo lo obtenido del Laplaciano en la ecuación (2), llegamos a:

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta \tag{4}$$

Utilizamos ahora la ecuación de Navier-Stokes (1) y desarrollamos igualmente el Laplaciano, quedando,

$$(v\cdot\nabla)v_\theta = (v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z})v_\theta = v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \tag{5}$$

Sustituimos en (1):

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \eta\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \tag{6}$$

Haciendo uso de la igualdad (4), gracias a la ecuación de continuidad, sustituimos en (6) y comprobamos que hay términos que se cancelan. Además, como hemos dicho anteriormente, v_θ sólo depende de r, por tanto, finalmente llegamos a:

$$\eta\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2}\right) = 0$$

Como podemos comprobar, en ambos casos llegamos a esta misma solución:

$$\nabla^2 v_\theta = \frac{v_\theta}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_\theta}{dr}\right) = \frac{v_\theta}{r^2}$$

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{1}{r^2}v_\theta = 0 \Rightarrow r^2\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + r\frac{dv_\theta}{dr} - v_\theta = 0$$

Es una ecuación diferencial que podemos resolver fácilmente con Euler, de la siguiente manera:
$r = e^t$
$\frac{dv_\theta}{dr} = e^{-t}\frac{dv_\theta}{dt}$
$\frac{d^2 v_\theta}{dr} = e^{-2t}\left(\frac{d^2 v_\theta}{dt^2} - \frac{dv_\theta}{dt}\right)$
Sustituimos, eliminamos los términos que se cancelan, simplificamos y llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 v_\theta}{dt} - v_\theta = 0$$

por tanto, tenemos dos raíces ± 1. De este modo,

$$v_\theta(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

y deshaciendo el cambio llegamos a la siguiente expresión para la velocidad:

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Aplicamos las condiciones de contorno para averiguar las constantes:

$$v_\theta(r = R_2) = 0 = AR_2 + \frac{B}{R_2} \Rightarrow B = -AR_2^2$$

$$v_\theta(r = R_1) = \Omega R_1 = AR_1 + \frac{B}{R_1} \Rightarrow A = \Omega - \frac{B}{R_1^2}$$

Así obtenemos los coeficientes:

$$A = \frac{\Omega}{1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

$$B = \frac{\Omega}{\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}}$$

El campo de velocidades es por tanto:

$$v_\theta = \frac{\Omega R_1^2}{R_1^2 - R_2^2}(r - \frac{R_2^2}{r})$$

Conclusión

Como muestra la figura, el perfil de velocidades decrece rápidamente a medida que nos alejamos de la fuente de movimiento (el cilindro interior). Es curioso que el resultado no depende de la viscosidad, sino tan solo de la velocidad del cilindro interior (en caso de que el otro cilindro también se moviera, también dependería de su velocidad). No obstante, es necesario que la viscosidad sea mayor que cero, ya que en otro caso el fluido no podría ser impulsado por el cilindro (si se revisan los pasos que hemos dado, puede verse que la velocidad sería cero si η fuera cero).

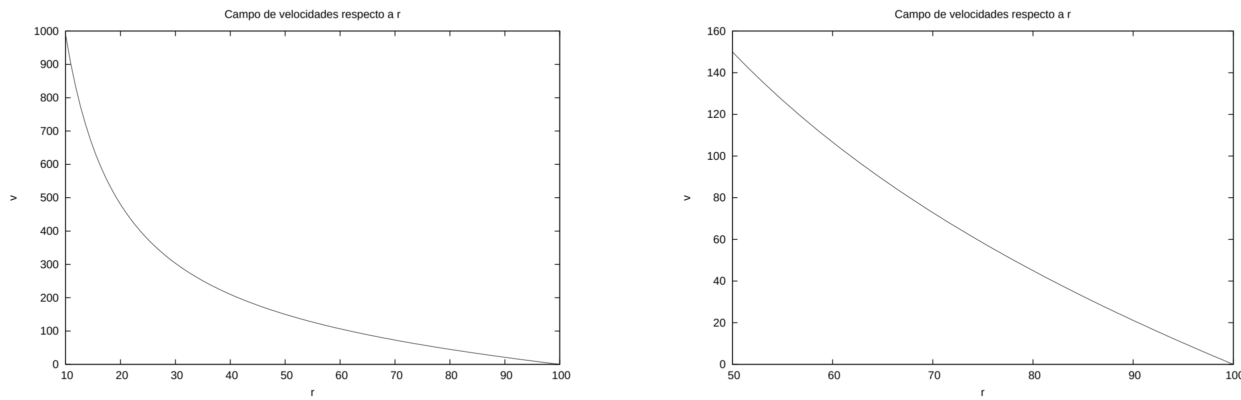

Figure 1: Campo de velocidades en función de r. NOTA: se han utilizado los valores $R_1 = 10$ y $R_2 = 100$ para la figura de la izquierda y $R_1 = 50$ y $R_2 = 100$ para la figura de la derecha. No indicamos unidades porque el objetivo es mostrar la forma de la curva. Podemos suponer que son mm, cm, m, o cualquier otra unidad, al igual que los valores de velocidad.