PROBLEMA GRUPO 3

Daniel Bejarano Salgado

David González Flores

Jairo Mena Sánchez

5º-Consideremos el movimiento plano de un líquido cuya velocidad viene dada por las ecuaciones:

$$v_x(x,y,t) = -\frac{Ay}{2\upsilon t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\upsilon t}\right),$$

$$v_y(x,y,t) = \frac{Ax}{2\upsilon t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\upsilon t}\right),$$

donde υ es la viscosidad cinemática y A es una constante con dimensiones de superficie.

a) Calcular las líneas de corriente y las trayectorias para este campo de velocidades:

Asumimos, a la hora de integrar, que la viscosidad cinemática es aproximadamente constante. Calculemos las líneas de corriente:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \rightarrow \quad \frac{-2\upsilon t^2 dx}{Aye^{-\frac{x^2+y^2}{4\upsilon t}}} = \frac{2\upsilon t^2 dy}{Axe^{-\frac{x^2+y^2}{4\upsilon t}}} \quad \rightarrow \quad -\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

Si separamos variables, tenemos:

$$-xdx = ydy \quad \rightarrow \quad -\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C$$

Por tanto, la expresión de las líneas de corriente será:

$$\boxed{x^2 + y^2 = C` \qquad donde\ C` = -2C}$$

Calculemos las trayectorias:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

Podemos hacer una cambio de coordenadas, y escribirlas en polares (por la forma de las líneas de corriente, parece lo más apropiado, ya que una de las coordenadas será constante). Nos quedaría:

$$x = r\cos\theta \quad \rightarrow \quad v_x = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}sen\,\theta = v_r\cos\theta - v_\theta sen\,\theta$$

$$y = rsen\,\theta \;\; \rightarrow \;\; v_y = \frac{dr}{dt}\operatorname{sen}\theta + r\frac{d\theta}{dt}cos\,\theta = v_r \operatorname{sen}\theta + v_\theta cos\,\theta$$

Donde $v_r = \frac{dr}{dt} y\; v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$ son las correspondientes velocidades en coordenadas polares. Teniendo en cuenta los valores de $v_x\; y\; v_y$ que nos da el enunciado, y las relaciones que acabamos de escribir, tenemos las siguientes igualdades:

$$v_r \cos\theta - v_\theta sen\,\theta = \frac{-Arsen\,\theta}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}} \qquad (1)$$

$$v_r sen\,\theta + v_\theta \cos\theta = \frac{Arcos\,\theta}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}} \qquad (2)$$

Bien, para obtener v_r, multiplicamos (1) por $\cos\theta$ y (2) por $sen\,\theta$, de modo que nos quedaría:

$$v_r \cos^2\theta - v_\theta sen\theta \cos\theta = \frac{-Arsen\theta\cos\theta}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}$$

$$v_r sen^2\theta + v_\theta \cos\theta sen\,\theta = \frac{Arcos\,\theta sen\,\theta}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}$$

Si sumamos estas dos expresiones:

$$v_r(\cos^2\theta + sen^2\theta) = v_r = \frac{Arsen\,\theta cos\theta}{2\upsilon t^2}\left(e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}} - e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}\right) = 0$$

Por tanto:

$$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt} = 0 \;\; \rightarrow \;\; r(t) = Cte}$$

Por otro lado, si ahora multiplicamos (1) por $\operatorname{sen}\theta$ y (2) por $cos\,\theta$, para obtener v_θ, nos quedaría:

$$v_r sen\theta\cos\theta - v_\theta sen^2\theta = \frac{-Arsen^2\theta}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}$$

$$v_r \cos\theta sen\,\theta + v_\theta \cos^2\theta = \frac{Arcos^2\theta}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}$$

Si restamos la segunda ecuación menos la primera, obtenemos:

$$v_\theta(\cos^2\theta + sen^2\theta) = v_\theta = \frac{Ar}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}(\cos^2\theta + sen^2\theta)$$

Teniendo en cuenta que $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$, esta ecuación queda:

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{Ar}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}$$

Si integramos esta expresión:

$$d\theta = \frac{A}{2\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}dt \;\rightarrow\;\; \theta(t) = \frac{A}{2\upsilon}\int \frac{1}{t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}dt = \frac{4A\upsilon}{2r^2\upsilon}\int \frac{r^2}{4\upsilon t^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}}dt$$

Por tanto:

$$\boxed{\theta(t) = \frac{2A}{r^2} e^{-\frac{r^2}{4\upsilon t}} + D}$$

b) En función del resultado anterior, elegir el sistema apropiado para describir el flujo:

Tal como se ha mencionado, la forma de las líneas de corriente nos indica que lo más apropiado para describir este flujo bidimensional, sería un sistema de coordenadas polares.

c) Demostrar que el flujo es incompresible:

Para que el flujo sea incompresible, se debe verificar:

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0$$

En coordenadas polares, la divergencia se escribe como sigue:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

Dado que la componente radial de la velocidad es nula, y la componente angular no depende del ángulo, se obtiene que la divergencia es nula.

Por tanto, el fluido es incompresible.

d) Sabiendo que la densidad del fluido es ρ, calcular la energía cinética por unidad de longitud transversal de toda la masa fluida.

Si nos pidieran la densidad de energía cinética de un elemento de fluido sería $\frac{1}{2}\rho v^2$. Para calcular la densidad de energía cinética por unidad de longitud transversal de un elemento de fluido, sería: $\frac{1}{2}\rho v^2 dS$.

Para todo el sistema habrá que integrar esta ecuación. El elemento diferencial de superficie, se escribirá en coordenadas polares:

$$dS = r dr d\theta$$

Por tanto, lo que nos piden es:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta r \rho v^2$$

Si escribimos el cuadrado de la velocidad en coordenadas polares, tendremos:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_r^2 \cos^2\theta + v_\theta^2 sen^2\theta - 2v_r v_\theta sen\theta \cos\theta + v_r^2 sen^2\theta + v_\theta^2 \cos^2\theta + 2v_r v_\theta sen\theta \cos\theta$$

Por tanto:

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

Dado que $v_r = 0$, tenemos que $v^2 = v_\theta^2$. Por tanto la integral queda:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta r\rho v^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta r\rho {v_\theta}^2$$

Teniendo en cuenta el valor de v_θ, tenemos:

$$\frac{\rho}{2}\frac{A^2}{4v^2t^4}\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta r^3 e^{-\frac{2r^2}{4vt}} = 2\pi\frac{\rho}{2}\frac{A^2}{4v^2t^4}\int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r^2}{4vt}} dr$$

Sabemos la siguiente integral:

$$\int_0^\infty r^3 e^{-ar^2} dr = (2a^2)^{-1}$$

En nuestro caso, la constante a será:

$$a = \frac{2}{4vt}$$

Por tanto:

$$\pi\rho\frac{A^2}{4v^2t^4}\int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r^2}{4vt}} dr = \pi\rho\frac{A^2}{4v^2t^4}\left(\frac{8}{16v^2t^2}\right)^{-1}$$

En definitiva, la energía cinética por unidad de longitud transversal es:

$$\boxed{\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2}\rho v^2 = \pi\rho\frac{A^2}{4v^2t^4}\left(\frac{8}{16v^2t^2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\rho\pi\frac{A^2}{t^2}}$$