PROBLEMAS DE FÍSICA DE FLUIDOS

Curso 2011/2012

1. Consideremos el campo de velocidades $\mathbf{v} = tx\ \mathbf{i} + ty\ \mathbf{j}$. Calcular (a) la ecuación de las líneas de corriente, (b) la trayectoria de una partícula fluida que en $t = 0$ se encuentra en (x_0, y_0), y (c) la aceleración de la partícula.

2. Un flujo unidimensional está dado por el campo de velocidades

$$\mathbf{v} = 10\ U_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \mathbf{i},$$

donde U_0 es una velocidad y L una longitud de referencia. Calcular:

   a) el campo aceleración,

   b) la posición $x(t)$ para una partícula fluida que en $t = 0$ está en $x = 0$,

   c) la aceleración $a_x(t)$ para esa partícula a partir del resultado anterior. Compárala con la del apartado a)

3. Consideremos el campo de velocidades bidimensional $v_x = 2x - 3y$, $v_y = 3x - 2y$ en el S.I. de unidades. Calcular:

   a) la línea de corriente que pasa por el punto $(1, 1)$,

   b) el campo vectorial aceleración,

   c) el campo y líneas de vorticidad.

4. Supongamos que utilizamos diminutas burbujas de hidrógeno como trazadores para visualizar un flujo bidimensional. Todas las burbujas se generan en el punto $(0, 0)$. El campo de velocidades viene dado por

$$v_x = u_1, \quad v_y = v_1, \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 2\text{s}$$

$$v_x = 0, \quad v_y = v_2, \quad \text{si} \quad t > 2\text{s},$$

donde u_1, v_1 y v_2 son constantes conocidas. Obtener una expresión que propocione la distancia $L(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$ que separa las dos burbujas generadas en los instantes $t = 1$s y $t = 3$s.

5. Consideremos el movimiento plano de un líquido cuya velocidad viende dada por las ecuaciones

$$v_x(x, y, t) = -\frac{Ay}{2\nu t^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\nu t}\right),$$

$$v_y(x, y, t) = \frac{Ax}{2\nu t^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\nu t}\right),$$

donde ν es la viscosidad cinemática y A es una constante con dimensiones de superficie.

   a) Calcular las líneas de corriente y las trayectorias para este campo de velocidades.

   b) En función del resultado anterior, elegir el sistema apropiado para describir el flujo.

   c) Demostrar que el flujo es incompresible.

   d) Sabiendo que la densidad del fluido es ρ, calcular la energía cinética E por unidad de longitud transversal de toda la masa fluida.

6. Un campo de velocidades incompresible está dado por

$$v_x = a(x^2 - y^2), \quad v_z = b,$$

con v_y desconocida y a y b son constantes. ¿ Cuál debe ser la forma de la componente v_y de la velocidad?

7. Considerar el campo de velocidades

$$v_x = a(x^2 - y^2), \quad v_y = -2axy, \quad v_z = 0.$$

Determinar bajo qué condiciones es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso de que la gravedad $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. Supongamos que se dan dichas condiciones y determinar la distribución de presiones resultante.

8. En el caso de un flujo laminar, incompresible y estacionario en un tubo largo, la distribución de velocidades viene dada por

$$v_z = U \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad v_r = v_\theta = 0,$$

donde U es la velocidad máxima en la línea central y R es el radio del tubo. Si la temperatura en la pared es constante e igual a T_p y la temperatura sólo depende de la distancia r a la línea central, $T = T(r)$, encontrar $T(r)$ para esta configuración.

9. Determinar la función corriente para el campo de velocidades

$$v_x = a(x^2 - y^2), \quad v_y = -2axy, \quad v_z = 0.$$

¿Existe un potencial de velocidades para este campo de velocidades?

10. Un flujo incompresible bidimensional está dado por

$$v_x = -\frac{Ky}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{Kx}{x^2 + y^2},$$

donde K es una constante. ¿Es este flujo irrotacional? Si es así, encontrar el potencial de velocidades.

11. Sea el campo de velocidades bidimensional siguiente:

$$v_x = \frac{3x}{1+t}, \quad v_y = -\frac{y}{1+t}.$$

Calcular la evolución temporal del campo homogéneo de densidades sabiendo que en el instante inicial $\rho(x, y) = \rho_0$.

12. Determinar la forma de la superficie de un fluido ideal incompresible sometido a un campo gravitatorio y contenido en un recipiente cilíndrico que gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular constante Ω.

13. Demostrar que el tensor de tensiones de la viscosidad σ'_{ij} se anula cuando el fluido completo gira con velocidad angular uniforme $\mathbf{\Omega}$.

14. Se propone un flujo incompresible tridimensional que tiene la siguiente forma vectorial:

$$\mathbf{v} = Kx\,\mathbf{i} + Ky\,\mathbf{j} - 2Kz\,\mathbf{k}.$$

   a) Comprobar si es una solución válida de las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes si la gravedad $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{k}$.
   b) Calcular el campo de presiones $p(x, y, z)$.
   c) ¿Es el flujo irrotacional?

15. Consideremos el siguiente campo de velocidades en coordenadas cilíndricas de un flujo incompresible:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = C\,r^n, \quad v_z = 0,$$

donde C es una constante.

   a) Despreciando los efectos de la gravedad, demostrar que dicho flujo obedece las ecuaciones de Navier-Stokes para sólamente dos valores de n.
   b) Sabiendo que la presión sólo depende de la coordenada radial y que $p = p_0$ en $r = R$, encontrar en cada caso la distribución de presiones.

16. El perfil de velocidades para el flujo laminar entre dos placas ($0 \leq y \leq h$) viene dado por

$$v_x = \frac{4u_0 y(h-y)}{h^2}, \quad v_y = v_z = 0,$$

donde u_0 es la velocidad máxima. Si la temperatura de ambas placas es T_p, utilizar la ecuación de la energía para un fluido incompresible para obtener la distribución de temperaturas $T(y)$ entre las placas si el flujo es estacionario.

17. Consideremos el flujo estacionario, incompresible, viscoso y bidimensional ($\partial/\partial z = 0$) entre dos placas paralelas separadas una distancia $2h$ ($-h \leq y \leq +h$). Supongamos que las placas son muy largas y muy anchas de modo que el flujo es esencialmente paralelo a las placas, $v_x \neq 0$, $v_y = v_z = 0$ y que la presión p es constante. Supongamos que la placa de abajo está fija y la de arriba se mueve a velocidad U y que la presión es uniforme. Determinar el campo de velocidades (flujo de Couette) si despreciamos el efecto de la gravedad.

18. Consideremos el flujo estacionario, incompresible, viscoso y bidimensional ($\partial/\partial z = 0$) entre dos placas paralelas separadas una distancia $2h$ ($-h \leq y \leq +h$). Supongamos que las placas son muy largas y muy anchas de modo que el flujo es esencialmente paralelo a las placas, $v_x \neq 0$ pero $v_y = v_z = 0$. Supongamos que ambas placas están fijas y que la presión varía en la dirección x. Determinar el campo de velocidades (flujo de Poiseuille).

19. Consideremos las condiciones del flujo de Poiseuille. Calcular en ese caso, (a) el esfuerzo cortante en la pared, (b) la función corriente, (c) la vorticidad, (d) el potencial de velocidades, y (e) la velocidad media.

20. Consideremos el flujo incompresible en un conducto recto de sección circular de radio R (flujo de Hagen-Poiseuille). La región en estudio está lo suficientemente alejada de la entrada para que el flujo se apuramente axial ($v_z \neq 0$), mientras que $v_r = v_\theta = 0$. Determinar el perfil de velocidades suponiendo simetría axial y despreciando los efectos de la gravedad.

21. Consideremos las condiciones del flujo de Hagen-Poiseuille. Calcular en ese caso, (a) el esfuerzo cortante en la pared, y (b) la velocidad media.

22. Consideremos un fluido con densidad y viscosidad constantes entre dos cilindros concéntricos de radios $R_2 > R_1$. No hay movimiento axial o efectos de borde por lo que $v_z = \partial/\partial z = 0$. Supongamos que el cilindro interior gira con velocidad angular Ω y el cilindro exterior está en reposo. Dado que hay simetría circular, la velocidad es independiente de θ y sólo es función de r. Determinar el perfil de velocidades.

23. Consideremos el flujo sin deslizamiento entre dos cilindros concéntricos fijos. Determinar la forma más general del movimiento del fluido en esa situación ($v_\theta(r)$, $v_r = v_z = 0$) a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas polares.

24. Un potencial de velociades en coordenadas polares está dado por

$$\phi = \frac{K \cos\theta}{r}, \quad K \equiv \text{cte}.$$

Determinar la función corriente de este flujo.

25. La función corriente de un flujo irrotacional y plano en coordenadas polares es

$$\psi = C\theta - K \ln r,$$

donde C y K son constantes. Determinar el potencial de velocidades.

26. Detreminar el potencial de velocidades $\phi(r,\theta)$ para el flujo bidimensional en coordenadas polares $v_r = Q/r$, $v_\theta = K/r$, donce Q y K son constantes.

27. Consideremos el flujo de Couette estacionario, incompresible y bidimensional (flujo entre dos placas planas infinitas, la superior moviéndose con velocidad constante y la inferior en reposo). Supongamos que el fluido es *no newtoniano*, con los esfuerzos viscosos dados por

$$\tau_{xx} = a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^c, \quad \tau_{yy} = a\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^c, \quad \tau_{zz} = a\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^c,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{a}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^c, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{a}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^c,$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{a}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^c,$$

donde a y c son constantes del fluido y (u, v, w) denotan las componentes del vector velocidad. Determinar el perfil de velocidades $u(y)$ para la geometría del flujo de Couette ($v = w = 0$, $u \neq 0$).

28. Consideremos el flujo estacionario de un gas diluído (ideal) situado entre dos placas paralelas separadas una distancia $2h$ ($-h \leq y \leq +h$) y que están a la misma temperatura. Supongamos que la placa de abajo está fija mientras que la de arriba se mueve a la velocidad U y que la presión p es uniforme. Supongamos que la viscosidad η y la conductividad térmica κ del gas no son constantes y dependen de p y T de la forma $p/(\rho T^\alpha)$, donde α es una cierta constante. En estas condiciones, $v_x(y)$, $v_y = v_z = 0$ y $T(y)$. Determinar el campo de velocidades y la temperatura como funciones de la coordenada y si desprecimaos el efecto de la gravedad.

29. Determinar el flujo estacionario de un fluido incompresible que se produce entre dos paredes planas que intersectan formando un ángulo α. Considerar coordenadas cilíndricas y suponer que el flujo es uniforme en la dirección z y totalmente radial.

30. Determinar el coeficiente de difusión barométrica de una mezcla de dos gases perfectos.